LOŠIMŲ TEORIJA



Vilniaus universiteto leidykla

ANTANAS APYNIS

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Antanas Apynis

L O Š I M Ų T E O R I J A

Vilniaus universiteto leidykla
2007

UDK 519.8
Ap45

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto
Matematikos ir informatikos fakulteto taryba
(2005 m. lapkričio 15 d.; protokolas Nr. 2)

Recenzavo
Doc. dr. Vaclovas Daukšas (Vilniaus universitetas)

ISBN 978-9986-19-980-9

PRATARMĖ

Šios knygos pagrindas yra lošimų teorijos bei socialinių ir gamtos reiškinių matematinio modeliavimo paskaitos, autoriaus skaitytos 1986–2005 metais Vilniaus universiteto matematikos krypties studijų programų studentams.

Pirmajame skyriuje apžvelgiamas bendrasis lošimas kaip konfliktinės situacijos matematinis modelis. Toliau lošėjų preferencijos susiejamos su naudingumo funkcijomis ir pateikiami tam tikri teoriniai rezultatai.

Knygos turinys apima nekoalicinius ir koalicinius lošimus.

Nekoaliciniuose lošimuose optimalumas grindžiamas Nešo pusiausvyra. Daugiausia dėmesio skiriama dviejų asmenų antagonistiniams lošimams, ypač matriciniams lošimams ir jų mišriesiems plėtiniams. Septintajame skyriuje skaitytojas supažindinamas su bimatriciais lošimais ir jų mišriaisiais plėtiniais.

Koalicinių lošimų teorijoje apsiribota lošimais, kuriuos galima apibrėžti superadityviomis charakteristinėmis funkcijomis. Skaitytojas turės galimybę susipažinti su klasikiniais optimalumo principais – lošimo šerdimi ir stabiliosiomis aibėmis, taip pat su lošimo nukleolu bei aksiominiu būdu formuluojama Šiaplio verte.

Autorius nuoširdžiai dėkoja kolegai Vilniaus universiteto docentui Vaclovui Daukšui, kuris perskaitė šios knygos rankraštį ir pateikė vertingų pastabų bei pasiūlymų.

Labai ačiū redaktorei Gražinai Indrišiūnienei už rūpestingą dėmesį knygos kalbai ir sūnui už teksto surinkimą bei maketavimą.

Antanas Apynis

TURINYS

1. Lošimo sąvoka. Bendrasis konflikto matematinis modelis. Optimalumo samprata

Lošimų teorija nagrinėja konfliktinių situacijų matematinius modelius. Konfliktais yra vadinami įvairūs žmonių bendravimo reiškiniai ir procesai, susiję su atskirų individų bei jų grupių interesais.

Sudarant matematinį modelį yra būtina formalizuoti patį konfliktą ir apibūdinti matematiniais sąryšiais konflikto vyksmą.

Konflikto dalyviai yra vadinami *lošėjais*. Atskirus lošėjus žymėkime i, j, k, ..., o visą jų aibę – N. Kai N yra baigtinė aibė, ji paprastai užrašoma taip:

$$N = \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\};$$

čia $n = |N|$ yra aibę N sudarančių lošėjų skaičius.

Aibės N poaibiai yra vadinami *koalicijomis* (įskaitant N ir $\varnothing$). Pagal konfliktinės situacijos pobūdį dalis įmanomų koalicijų gali būti uždraustos, todėl nagrinėjant konfliktus yra svarbu žinoti *leistinąją koalicijų aibę* $\mathcal{K}$. Ji paprastai užrašoma taip: $\mathcal{K} = \{K\}$, $K \subset N$. Kraštutiniai atvejai: $\mathcal{K} = \{\{i\} :\ i \in N\}$ ir $\mathcal{K} = 2^N$.

Galimi (įmanomi) lošėjų ir jų koalicijų veiksmai yra vadinami *strategijomis*. Jas žymėsime atitinkamai s_i, $i \in N$, ir s_K, $K \in \mathcal{K}$. Lošėjų strategijų aibes žymėsime S_i, $i \in N$, ir S_K, $K \in \mathcal{K}$.

Konflikto baigties rezultatai yra vadinami *lošimo baigmėmis*. Baigmes žymėsime σ, o jų aibę – Σ. Taigi $\Sigma = \{\sigma\}$. Baigmių aibė Σ gali būti tiek baigtinė, tiek begalinė.

Lošėjų $i \in N$ ir jų koalicijų $K \in \mathcal{K}$ interesai matematiškai yra modeliuojami binariaisiais *preferencijos sąryšiais* (žym. $\underset{i}{\succsim}$, $i \in N$, arba $\underset{K}{\succsim}$, $K \in \mathcal{K}$) baigmių aibėje $\sum$.

Nagrinėdami konfliktines situacijas turėsime mintyje, kad yra žinoma leistinoji koalicijų aibė $\mathcal{K} = \{K\}$, $K \subset N$, visų koalicijų $K \in \mathcal{K}$ strategijų aibės S_K, baigmių aibė $\sum = \{\sigma\}$ ir visų koalicijų $K \in \mathcal{K}$ preferencijos sąryšiai $\underset{K}{\succsim}$. Šių komponenčių rinkinys

$$G = \left\langle \mathcal{K},\ \{S_K\}_{K \in \mathcal{K}},\ \Sigma,\ \left\{\underset{K}{\succsim}\right\}_{K \in \mathcal{K}} \right\rangle$$

yra vadinamas *lošimu*.

Priklausomai nuo papildomos informacijos bendrasis konflikto matematinis modelis yra patikslinamas ir sukonkretinamas. Klasifikuojant lošimus yra išskiriamos dvi pagrindinės lošimų klasės – nekoaliciniai lošimai (lošėjams draudžiama bendradarbiauti) ir koaliciniai (kooperatiniai) lošimai (leidžiamos visos įmanomos lošėjų koalicijos).

Aptarkime konflikto dinamiką.

Iš pradžių apibrėžkime *koalicinės struktūros* sąvoką.

1.1 APIBRĖŽIMAS. Aibė $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$, yra vadinama lošimo G koalicine struktūra, jeigu tenkina šias sąlygas:

1) $K', K'' \in \mathcal{P} \Rightarrow K' \cap K'' = \varnothing$

ir

2) $K \notin \mathcal{P} \Rightarrow \left[\exists K^\circ \in \mathcal{P}\right] K^\circ \cap K \neq \varnothing$.

Pirmoji apibrėžimo sąlyga reiškia, kad nė vienas lošėjas negali priklausyti kelioms (dviem ir daugiau) koalicijoms. Iš antrosios sąlygos išplaukia, kad kiekvienas aibės N lošėjas priklauso kuriai nors struktūros $\mathcal{P}$ koalicijai.

Matematiškai modeliuojant konflikto vyksmas suvokiamas taip. Iš pradžių lošėjai derasi dėl bendradarbiavimo (jungimosi į koalicijas). Susidarius tam tikrai koalicinei struktūrai $\mathcal{P}$, kiekviena koalicija K, $K \in \mathcal{P}$, pasirenka kurią nors strategiją s_K, $s_K \in S_K$. Kiekvienas pasirinkimas $s_K \in S_K$, $K \in \mathcal{P}$, susiaurina (nors nebūtinai) konflikto baigties galimybes iki tam tikros aibės $\Sigma(s_K)$, $\Sigma(s_K) \subset \Sigma$.

Pasirinktų strategijų $s_K \in S_K$, $K \in \mathcal{P}$, rinkinį pažymėkime $s(\mathcal{P})$ ir pavadinkime *situacija*, o $\sigma(s(\mathcal{P}))$ – lošimo baigmių, atitinkančių situaciją $s(\mathcal{P})$, aibe. Aišku, kad

$$\sigma(s(\mathcal{P})) = \bigcap_{K \in \mathcal{P}} \Sigma(s_K).$$

Nesunku rasti įvairių pavyzdžių, kuriuose $\sigma(s(\mathcal{P})) = \varnothing$ arba $\sigma(s(\mathcal{P})) = \Sigma$. Taikomuoju aspektu yra įdomesni lošimai, kai $\sigma(s(\mathcal{P}))$ yra vienelementė aibė.

Labai svarbi yra prielaida, kad lošdami (konfliktinėje situacijoje) kiekvienas lošėjas ir kiekviena koalicija siekia naudos tik sau. Didesnės naudos siekimu yra grindžiamos ir visos lošėjų koalicijos.

Optimalumo principu yra vadinamas bet kuris atvaizdis φ, kuris kiekvienam lošimui G, priklausančiam tam tikrai lošimų klasei, priskiria kurį nors baigmių aibės Σ poaibį $\varphi(G)$.

Matematiniu požiūriu yra labai svarbūs optimalių baigmių egzistavimo ir vienaties aspektai, o taikomuoju požiūriu – pačių principų priimtinumo aspektai.

Optimalumo principai formuluojami įvairiai. Vieni – konkrečiomis formulėmis (taisyklėmis), kiti – tam tikromis išankstinėmis sąlygomis – aksiomomis. Nors ir galima įžvelgti tam tikrų bendrų visiems žinomiems optimalumo principams bruožų, nesunku rasti ir daug skirtingų savybių. Pirmiausia tai susiję su konflikto pobūdžiu – lošėjams leidžiama bendradarbiauti (jungtis į koalicijas) ar ne.

Šiame lošimų teorijos kurse susipažinsime su Nešo pusiausvyros principu, taikomu nekoaliciniuose lošimuose, bei pagrindiniais koalicinių lošimų optimalumo principais: lošimo šerdimi, stabiliosiomis aibėmis, Šiaplio verte, nukleolu.

2. Preferencija ir naudingumo funkcija

Nagrinėjant sprendimų priėmimo uždavinius, taigi ir lošiant, iš tam tikros alternatyvų aibės (lošiant – iš baigmių aibės $\sum$) reikia išrinkti optimalių alternatyvų poaibį. Nors pati optimalumo sąvoka yra gana paprasta, optimalių alternatyvų aibės paieškos uždaviniai gali būti labai sudėtingi. Matematiškai modeliuojant sprendimų priėmimo procesą, jis yra supaprastinamas. Pirmiausia apsiribojama prielaida, kad šio proceso dalyviai (lošiant – lošėjai) geba palyginti alternatyvas poromis pagal jų tinkamumą (priimtinumą). Tas gebėjimas palyginti yra formalizuojamas binariuoju preferencijos sąryšiu (žym. $\succsim$) nagrinėjamoje alternatyvų aibėje.

Tarkime, kad X yra kuri nors alternatyvų aibė, kurioje apibrėžtas binarusis preferencijos sąryšis $\succsim$. Užrašymas $x \succsim y$ ($x,\ y \in X$) suprantamas, jog alternatyva x yra ne blogesnė už alternatyvą y. Kai $x \succsim y$ ir $y \succsim x$, tai sakoma, kad abi alternatyvos, x ir y, yra lygiavertės (ekvivalenčios) ir rašoma $x \sim y$. Jei $x \succsim y$ ir ne $y \succsim x$ (žym. $y \not\succsim x$), tai sakoma, kad alternatyva x yra priimtinesnė (griežtai) už alternatyvą y. Tada rašoma $x \succ y$.

Binarusis sąryšis $\succsim$, apibrėžtas aibėje X, yra vadinamas *tranzityviu*, jeigu tenkina sąlygą:

$$(x \succsim y\,,\ y \succsim z) \Rightarrow x \succsim z;\ x,\ y,\ z \in X\ .$$

Tranzityvus binarusis sąryšis yra vadinamas *tvarkos sąryšiu* ar tiesiog *tvarka*. Tvarka gali būti *dalinė* (kai yra nors viena alternatyvų pora $x,\ y \in X$, kuriai negalioja nei sąryšis $x \succsim y$, nei sąryšis $y \succsim x$) arba *visiška* (kai kiekvieną alternatyvų porą $x,\ y \in X$ sieja nors vienas iš sąryšių $x \succsim y$ ir $y \succsim x$).

Tvarkos sąryšis $\succsim$ aibėje X yra vadinamas *negriežtu*, jeigu jis yra *refleksyvus*, t. y. tenkina sąlygą:

$$x \succsim x, \text{ kai } x \in X .$$

Šis sąryšis yra vadinamas *griežtu* tvarkos sąryšiu, jeigu yra *nerefleksyvus*, t. y. tenkina sąlygą:

$$x \succsim y \Rightarrow y \not\succsim x;\ x,\ y \in X .$$

Tvarkos sąryšis lošimų teorijoje, matematinėje ekonomikoje ir kitose matematikos taikymų srityse paprastai yra vadinamas preferencija.

Kiekvienas preferencijos (tvarkos) sąryšis fiksuoja (konstatuoja) vienos alternatyvos pranašumą (didesnį vertingumą) prieš kitą alternatyvą, bet nenurodo, koks yra to pranašumo (didesnio vertingumo) laipsnis. Todėl nagrinėjant sprendimų priėmimo uždavinius kartais atsiranda daug matematinių problemų.

Sprendimų priėmimo problemų matematiniuose modeliuose preferencijos sąryšiai gana dažnai yra pakeičiami vadinamosiomis *naudingumo funkcijomis*, kurių reikšmės yra suvokiamos kaip tam tikri alternatyvų naudingumo (vertingumo) indeksai.

2.1 APIBRĖŽIMAS. Skaliarinė funkcija u, apibrėžta alternatyvų aibėje X, yra vadinama naudingumo funkcija, jeigu tenkina sąlygą:

$$u(x) \ge u(y) \Leftrightarrow x \succsim y;\ x,\ y \in X .$$

Kai X yra baigtinė alternatyvų aibė ir joje yra apibrėžtas visiškos tvarkos sąryšis $\succsim$, tai visas alternatyvas galima pažymėti indeksais taip, kad galiotų sąryšiai $x_{k+1} \succ x_k$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$; čia n – aibės

X elementų skaičius. Tada funkcija u, apibrėžta formule $u(x_k) = k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, yra naudingumo funkcija.

Begalinės alternatyvų aibės atveju naudingumo funkcijos egzistavimas yra problemiškesnis.

2.2 APIBRĖŽIMAS. Alternatyvų aibės X, kurioje apibrėžta preferencija $\succsim$, poaibis A yra vadinamas *tirštąja preferencijos atžvilgiu aibe*, jeigu kiekvienai alternatyvų porai $x,\ y \in X \setminus A$, $x \succ y$, egzistuoja $z \in A$, su kuria $x \succ z \succ y$.

2.1 TEOREMA. Tarkime, kad X yra begalinė visiškai sutvarkyta alternatyvų aibė. Jeigu šioje aibėje yra skaitus ir tirštas preferencijos atžvilgiu poaibis, tai joje egzistuoja ir naudingumo funkcija.

▲ ***Įrodymas.*** Tegu $\succsim$ yra griežtas visiškos tvarkos sąryšis aibėje X, o A yra skaitus ir tirštas preferencijos atžvilgiu aibės X poaibis. Pagal skaičiosios aibės apibrėžimą poaibio A elementus galima sunumeruoti: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

Iš pradžių apibrėžkime alternatyvų $a_k \in A$ naudingumo indeksus:

$$u(a_1) = 0,\ u(a_k) = \begin{cases} k, \text{ kai } a_k \succ a_i \text{ su visais } i = 1,\ \ldots,\ k-1, \\ -k, \text{ kai } a_i \succ a_k \text{ su visais } i = 1,\ \ldots,\ k-1, \\ q_k \ - \text{ kitais atvejais;} \end{cases}$$

čia $k = 2,\ 3,\ \ldots$, o q_k – bet koks racionalusis skaičius, kuris tarp skaičių $u(a_i)$, $i = 1,\ \ldots,\ k-1$, pagal didumą užima tokią pat padėtį kaip ir a_k pagal preferenciją tarp alternatyvų a_i, $i = 1,\ \ldots,\ k-1$.

Aišku, kad naudingumo indeksai $u(a_k)$, $a_k \in A$, tenkina sąlygą

$$u(a_i) > u(a_j) \Leftrightarrow a_i \succ a_j,$$
$$(a_i,\ a_j \in A).$$

Funkciją *u*, apibrėžtą poaibyje *A*, galima išplėsti į visą aibę *X* taip:

$$u(x) = \begin{cases} u(a_k), \text{ kai } x \in A,\ x = a_k, \\ \frac{1}{2}\left(r_1(x) + r_2(x)\right), \text{ kai } x \in X \setminus A; \end{cases}$$

čia

$$r_1(x) = \sup\left\{u(a_i):\ a_i \in A,\ x \succ a_i\right\},$$
$$r_2(x) = \inf\left\{u(a_i):\ a_i \in A,\ a_i \succ x\right\}.$$

Jei $x,\ y \in X \setminus A$ ir $x \succ y$, tai pagal tirštos preferencijos atžvilgiu aibės apibrėžimą egzistuoja $a_k \in A$, kad galiotų sąlyga $x \succ a_k \succ y$. Iš čia išplaukia, kad $u(x) > u(y)$. Teisinga ir atvirkštinė implikacija. ▼

Pastaba. Atkreipkime dėmesį į tai, kad naudingumo funkcija (kai egzistuoja) nėra vienintelė. Bet kuri naudingumo funkcijos *u* monotoniškai didėjanti transformacija taip pat yra naudingumo funkcija.

3. Nekoaliciniai lošimai. Nešo pusiausvyra

Lošimas $G=\left\langle \mathcal{K},\ \{S_K\}_{K\in\mathcal{K}},\ \Sigma,\ \left\{\underset{K}{\succsim}\right\}_{K\in\mathcal{K}} \right\rangle$ yra vadinamas *nekoaliciniu lošimu*, jeigu $\mathcal{K}=\{\{i\}:\ i\in N\}$; čia *N* yra lošėjų aibė. Taigi nekoaliciniame lošime lošėjams yra draudžiama bendradarbiauti.

Nekoaliciniam lošimui apibūdinti pakanka žinoti:

- lošėjų aibę *N*;
- kiekvieno lošėjo $i\in N$ strategijų aibę S_i;
- preferencijos sąryšius $\underset{i}{\succsim}$, $i\in N$, baigmių aibėje Σ.

Šiame lošimų teorijos kurse apsiribosime tokiomis konfliktinėmis sprendimų priėmimo situacijomis, kurios yra modeliuojamos nekoaliciniais lošimais su baigtinėmis lošėjų aibėmis $N=\{1;\ 2;\ ...;\ n\}$, o lošėjų preferencijas $\underset{i}{\succsim}$, $i\in N$, galima apibūdinti naudingumo funkcijomis u_i, $i\in N$.

Nekoaliciniame lošime nėra jokio derybų proceso renkantis strategijas, tačiau kiekvieno lošėjo išlošis priklauso ne tik nuo jo paties, bet ir nuo kitų konflikto dalyvių. Todėl prasminga nagrinėti lošėjų naudingumo funkcijas u_i, $i\in N$, strategijų aibių S_1, S_2, ..., S_n Dekarto sandaugoje $S=S_1\times S_2\times\ ...\ \times S_n$. Šios aibės elementus $s=(s_1;\ s_2;\ ...;\ s_n)$ toliau vadinsime *situacijomis*, o aibę *S* – *situacijų aibe*.

Aišku, kad sprendimų priėmimo procesas iš tikrųjų pasibaigia tada, kai visi lošėjai pasirenka strategijas $s_i\in S_i$. Todėl preferencijos sąryšius (nagrinėjant konfliktą matematiškai) tikslinga

perkelti iš baigmių aibės $\sum$ į situacijų aibę S. Taigi nekoalicinį lošimą suvoksime kaip rinkinį

$$G = \left\langle N;\ S;\ \{u_i\}_{i\in N} \right\rangle .$$

Nagrinėjant nekoalicinius lošimus, galima sugalvoti įvairių optimalumo principų. Iš pirmo žvilgsnio patraukliai atrodo *maksimalumo principas* $\varphi_{\max}$, pagal kurį situacija $s^\circ \in S$ būtų laikoma *optimalia situacija* lošime G, jeigu visiems $i \in N$ galioja sąlyga

$$u_i\left(s^\circ\right) = \max\left\{u_i\left(s\right):\ s \in S\right\}. \tag{3.1}$$

Vis dėlto ši sprendinio koncepcija yra nepriimtina jos realizuojamumo požiūriu, nes tik išskirtiniais atvejais $\varphi_{\max}\left(G\right) \neq \varnothing$. Taikomuoju aspektu daug priimtinesnis yra *Nešo* (John F. Nash (1928), ekonomikos Nobelio premijos laureatas (1994)) *pusiausvyros principas*, kuris apibrėžiamas taip:

situacija $s^\circ = \left(\overset{\circ}{s}_1;\ ...;\ \overset{\circ}{s}_{i-1};\ \overset{\circ}{s}_i;\ \overset{\circ}{s}_{i+1};\ ...;\ \overset{\circ}{s}_n\right)$, $s^\circ \in S$, yra vadinama *pusiausvyros situacija* (optimalia), jeigu visiems $i \in N$ galioja sąlyga

$$u_i\left(\overset{\circ}{s}_1;...;\ \overset{\circ}{s}_{i-1};\ \overset{\circ}{s}_i;\ \overset{\circ}{s}_{i+1};...;\ \overset{\circ}{s}_n\right) \geq u_i\left(\overset{\circ}{s}_1;...;\ \overset{\circ}{s}_{i-1};\ s_i;\ \overset{\circ}{s}_{i+1};...;\ \overset{\circ}{s}_n\right),\ \text{kai}$$

$$s_i \in S_i . \tag{3.2}$$

Lengva įsitikinti, kad maksimalumo principas $\varphi_{\max}$ tenkina Nešo pusiausvyros apibrėžimą.

Pažymėjus

$$s^\circ \parallel s_i = \left(\overset{\circ}{s}_1;\ ...;\ \overset{\circ}{s}_{i-1};\ s_i;\ \overset{\circ}{s}_{i+1};\ ...;\ \overset{\circ}{s}_n\right),\ s_i \in S_i,\ i \in N,$$

(3.2) nelygybę galima užrašyti taip:

$$u_i\left(s^\circ\right) \geq u_i\left(s^\circ \parallel s_i\right),\ s_i \in S_i,$$

o pačią pusiausvyros situaciją $s^\circ \in S$ apibūdinti šia sąlyga:

$$u_i\left(s^\circ\right) = \max\left\{u_i\left(s^\circ \parallel s_i\right):\ s_i \in S_i\right\},\ i \in N. \qquad (3.3)$$

■ **3.1 pavyzdys.** Nagrinėkime dviejų asmenų lošimą G, kuriame pirmasis lošėjas turi dvi strategijas, o antrasis – tris strategijas. Lošėjų išlošiai (naudingumo funkcijų reikšmės), atitinkantys įmanomas situacijas, yra matricų

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

elementai; šių matricų eilutės atitinka pirmojo lošėjo strategijas, o stulpeliai – antrojo lošėjo strategijas.

Taikydami apibrėžimą gauname, kad šis lošimas turi dvi pusiausvyros situacijas: $s^1 = (1;\ 1)$ ir $s^2 = (2;\ 2)$, nes:

1) $u_1(1,\ 1) = \max\{u_1(1,\ 1);\ u_1(2,\ 1)\} = \max\{3;\ -1\} = 3$

ir

$$u_2(1,\ 1) = \max\{u_2(1,\ 1);\ u_2(1,\ 2);\ u_2(1,\ 3)\} =$$
$$= \max\{4;\ -3;\ 2\} = 4;$$

2) $u_1(2,\ 2) = \max\{u_1(1,\ 2);\ u_1(2,\ 2)\} = \max\{0;\ 5\} = 5$

ir

$$u_2(2,\ 2) = \max\{u_2(2,\ 1);\ u_2(2,\ 2);\ u_2(2,\ 3)\} =$$
$$= \max\{2;\ 5;\ 3\} = 5.$$

■ **3.2 pavyzdys.** Tegu G yra trijų asmenų lošimas, kuriame lošėjų strategijų aibės yra $S_1 = I = \{1;\ 2\}$, $S_2 = J = \{1;\ 2;\ 3\}$, $S_3 = K = \{1;\ 2\}$. Šio lošimo situacijų aibę S sudaro trejetai $s = (i;\ j;\ k)$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Kiekvieną situaciją s atitinka lošėjų naudingumo funkcijų u_1, u_2 ir u_3 reikšmių trejetas $(u_1(i, j, k);\ u_2(i, j, k);\ u_3(i, j, k))$. Nustatykime, ar šis lošimas turi pusiausvyros situacijų, kai naudingumo indeksų lentelė yra tokia:

s \ u_i	u_1	u_2	u_3
(1, 1, 1)	2	4	5
(1, 1, 2)	7	6	1
(1, 2, 1)	7	3	4
(1, 2, 2)	9	0	3
(1, 3, 1)	4	5	0
(1, 3, 2)	1	3	0
(2, 1, 1)	8	1	5
(2, 1, 2)	3	0	4
(2, 2, 1)	6	1	6
(2, 2, 2)	8	5	2
(2, 3, 1)	5	2	3
(2, 3, 2)	6	4	1

Palyginę skaičius $u_1(1, j, k)$ ir $u_1(2, j, k)$, gauname šešias situacijas, kurios galbūt gali būti pusiausvyros situacijos:

$$(2,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 2).$$

Naudingumo funkcijos u_2 atžvilgiu gauname situacijų rinkinį:

$$(1,\ 3,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2).$$

Abu šie rinkiniai turi tik du bendrus elementus – situacijas $(1,\ 1,\ 2)$ ir $(2,\ 3,\ 1)$. Todėl tik jas ir reikia tikrinti funkcijos u_3 atžvilgiu. Gauname:

1) $\max\{u_3(1,\ 1,\ 1); u_3(1,\ 1,\ 2)\} = \max\{5;\ 1\} = 5 \neq u_3(1,\ 1,\ 2)$;
2) $\max\{u_3(2,\ 3,\ 1); u_3(2,\ 3,\ 2)\} = \max\{3;\ 1\} = 3 = u_3(2,\ 3,\ 1)$.

Taigi šis lošimas turi tik vieną pusiausvyros situaciją:

$$s^\circ = (2,\ 3,\ 1).$$

Ši pusiausvyros situacija pasižymi tokia savybe: kiekvienas lošėjas, pabandęs nukrypti nuo optimalios strategijos, tik sumažintų savo išloši (naudingumo indeksą).

■ **3.3 pavyzdys.** Raskime dviejų asmenų lošimo G, kurio strategijų aibes ir naudingumo funkcijų reikšmes nusako matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

pusiausvyros situacijų aibę.

Pagal matricos A elementus raskime situacijas $(i_j,\ j)$, $i_j \in \{1;\ 2;\ 3\}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, tenkinančias sąlygas

$$u_1(i_j,\ j) = \max_i u_1(i,\ j),\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Gausime aibę $S' = \{(3,\ 1);\ (1,\ 2);\ (2,\ 3);\ (1,\ 4)\}$.

Pagal matricos B elementus raskime situacijas $(i,\ j_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$, $j_i \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, kurios tenkina sąlygas

$$u_2(i,\ j_i) = \max_j u_2(i,\ j),\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Gausime aibę $S'' = \{(1,\ 3);\ (2,\ 1);\ (3,\ 4)\}$.

Matome, kad $S' \bigcap S'' = \varnothing$, todėl darome išvadą, kad šis lošimas pusiausvyros situacijų neturi.

4. Antagonistiniai lošimai. Minimakso teorema

Nekoalicinis lošimas $G=\left\langle N,\ S,\ \{u_i\}_{i\in N}\right\rangle$ yra vadinamas *pastovios sumos lošimu*, jeigu su kuriuo nors realiuoju skaičiumi c galioja lygybė

$$\sum_{i\in N} u_i(s)=c\,,\ s\in S. \tag{4.1}$$

Kai $c=0$, lošimas yra vadinamas *nulinės sumos* lošimu. Dviejų asmenų nulinės sumos lošimas yra vadinamas *antagonistiniu lošimu*.

Susipažinkime su antagonistiniais lošimais. Iš (4.1) gauname sąlygą

$$u_1(s)+u_2(s)=0\,,\ s\in S,$$

siejančią abiejų lošėjų naudingumo funkcijas. Taigi

$$u_2(s)=-u_1(s)\,,\ \text{kai}\ s\in S\,. \tag{4.2}$$

Matome, kad antagonistiniam lošimui apibūdinti pakanka žinoti tik vieno lošėjo naudingumo funkciją. Toliau funkciją $u=u(s),\ s\in S,$ laikysime pirmojo lošėjo naudingumo funkcija. Ją vadinsime tiesiog *lošimo naudingumo funkcija*.

Taikydami bendrąjį Nešo pusiausvyros apibrėžimą antagonistiniam lošimui, gausime tokią sąlygų sistemą:

$$\begin{cases} u\left(s_1^\circ,\ s_2^\circ\right)\ge u\left(s_1,\ s_2^\circ\right),\ \text{kai}\ s_1\in S_1,\\ -u\left(s_1^\circ,\ s_2^\circ\right)\ge -u\left(s_1^\circ,\ s_2\right),\ \text{kai}\ s_2\in S_2. \end{cases}$$

Taigi situacija $s^\circ = \left(s_1^\circ,\ s_2^\circ\right)$, $s^\circ \in S$, yra antagonistinio lošimo pusiausvyros situacija, jeigu

$$u\left(s_1,\ s_2^\circ\right) \le u\left(s_1^\circ,\ s_2^\circ\right) \le u\left(s_1^\circ,\ s_2\right), \text{ kai } s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2. \quad (4.3)$$

Ši sąlyga primena dviejų kintamųjų funkcijos balno taško apibrėžimą, todėl antagonistinio lošimo pusiausvyros situacija yra vadinama *balno tašku*.

Nagrinėjant konkrečius pavyzdžius nesunku įsitikinti, kad yra antagonistinių lošimų, kurie turi bent vieną balno tašką, ir yra antagonistinių lošimų, neturinčių balno taškų.

4.1 TEOREMA (MINIMAKSO). Pora $s^\circ = \left(s_1^\circ;\ s_2^\circ\right) \in S$ yra antagonistinio lošimo G balno taškas tada ir tik tada, kai

1) egzistuoja skaičiai:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u\left(s_1,\ s_2\right), \quad (4.4)$$

$$\overline{v} = \min_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u\left(s_1,\ s_2\right); \quad (4.5)$$

ir

2) galioja lygybė $\overline{v} = \underline{v}$.

▲ ***Įrodymas. Būtinumas.*** Tarkime, kad lošimas turi balno tašką. Pažymėkime jį $s^\circ = \left(s_1^\circ;\ s_2^\circ\right)$. Pagal apibrėžimą turi galioti sąlyga:

$$u\left(s_1,\ s_2^\circ\right) \le u\left(s_1^\circ,\ s_2^\circ\right) \le u\left(s_1^\circ,\ s_2\right),\ s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2. \quad (4.6)$$

Nagrinėjant kairiąją nelygybę, galima padaryti tokias išvadas:

$$\sup_{s_1 \in S_1} u\left(s_1, \overset{\circ}{s_2}\right) \le u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right)$$

ir

$$\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \le \sup_{s_1 \in S_1} u\left(s_1, \overset{\circ}{s_2}\right). \tag{4.7}$$

Analogiškai nagrinėdami (4.6) sąlygos dešiniąją nelygybę gauname, kad

$$\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) \ge u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right).$$

Sugretinę šią nelygybę su (4.7), turėsime dvigubą nelygybę

$$\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \le u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right) \le \sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2). \tag{4.8}$$

Nagrinėjant (4.6) sąlygą galima padaryti ir tokias išvadas:

a) $\inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) \le u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right) \le \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$,

kai $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$;

b) $\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) \le u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right) \le \inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$.

Pastarąją dvigubą nelygybę sugretinę su (4.8), gauname lygybių sistemą:

$$\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right).$$

Matome, kad išorinį infimumą ir išorinį supremumą galima pakeisti atitinkamai minimumu ir maksimumu, nes $u\left(\overset{\circ}{s_1}, \overset{\circ}{s_2}\right)$ yra konkreti naudingumo funkcijos reikšmė. Vadinasi,

$$\min_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2).$$

Kairėje šios lygybės pusėje yra skaičius $\overline{v}$, apibrėžtas formule (4.5), o dešinėje – skaičius $\underline{v}$, apibrėžtas formule (4.4). Ši lygybė taip pat rodo, kad galioja ir kita teoremos išvada: $\overline{v} = \underline{v}$.

Pakankamumas. Tarkime, kad egzistuoja (4.4) ir (4.5) formulėmis apibrėžti skaičiai $\overline{v}$ bei $\underline{v}$ ir galioja lygybė $\overline{v} = \underline{v}$. Pagal maksimumo apibrėžimą egzistuoja strategija $\overline{s}_1 \in S_1$, su kuria

$$\max_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \inf_{s_2 \in S_2} u(\overline{s}_1, s_2),$$

o pagal minimumo apibrėžimą egzistuoja strategija $\overline{s}_2 \in S_2$, su kuria

$$\min_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, \overline{s}_2).$$

Aišku, kad

$$\inf_{s_2 \in S_2} u(\overline{s}_1, s_2) \le u(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$$

ir

$$\sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, \overline{s}_2) \ge u(\overline{s}_1, \overline{s}_2).$$

Todėl galioja ir dviguba nelygybė:

$$\inf_{s_2 \in S_2} u(\overline{s}_1, s_2) \le u(\overline{s}_1, \overline{s}_2) \le \sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, \overline{s}_2).$$

Remiantis prielaida $\overline{v} = \underline{v}$, šią nelygybę galima taip perrašyti:

$$\sup_{s_1 \in S_1} u(s_1, \overline{s}_2) \le u(\overline{s}_1, \overline{s}_2) \le \inf_{s_2 \in S_2} u(\overline{s}_1, s_2).$$

Iš čia ir gauname balno taško sąlygą:

$$u(s_1, \overline{s}_2) \le u(\overline{s}_1, \overline{s}_2) \le u(\overline{s}_1, s_2), \ s_1 \in S_1, \ s_2 \in S_2 . \ \blacktriangledown$$

Išvados. Jeigu $\left(\overset{\circ}{s}_1; \overset{\circ}{s}_2\right)$ ir $(\overline{s}_1; \overline{s}_2)$ yra skirtingi antagonistinio lošimo G balno taškai, tai

1) $u\left(\overset{\circ}{s}_1, \overset{\circ}{s}_2\right) = u(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$;

2) situacijos $\left(\overset{\circ}{s}_1; \overline{s}_2\right)$ ir $\left(\overline{s}_1, \overset{\circ}{s}_2\right)$ taip pat yra šio lošimo balno taškai.

5. Matriciniai lošimai. Mišrusis matricinio lošimo plėtinys. Balno taško egzistavimo teorema

Matriciniu lošimu yra vadinamas antagonistinis lošimas, kuriame abiejų lošėjų strategijų aibės yra baigtinės.

Tegu $S_1 = \left\{ s_1^1;\ s_1^2;\ \ldots;\ s_1^m \right\}$ ir $S_2 = \left\{ s_2^1;\ s_2^2;\ \ldots;\ s_2^n \right\}$ yra lošėjų strategijų aibės, o u yra lošimo naudingumo funkcija. Tada strategijų poros $\left(s_1^i;\ s_2^j \right)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ m$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ n$, sudarys situacijų aibę $S = S_1 \times S_2$, o naudingumo funkcijos reikšmės $u\left(s_1^i,\ s_2^j \right)$ – naudingumo indeksų matricą

$$A = \begin{pmatrix} u\left(s_1^1,\ s_2^1\right) & u\left(s_1^1,\ s_2^2\right) & \cdots\cdots & u\left(s_1^1,\ s_2^n\right) \\ u\left(s_1^2,\ s_2^1\right) & u\left(s_1^2,\ s_2^2\right) & \cdots\cdots & u\left(s_1^2,\ s_2^n\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u\left(s_1^m,\ s_2^1\right) & u\left(s_1^m,\ s_2^2\right) & \cdots\cdots & u\left(s_1^m,\ s_2^n\right) \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad matrica A apibūdina visą matricinį lošimą. Kad būtų paprasčiau užrašyti teiginius ir skaičiavimus, pažymėkime:

- $I = \left\{ i:\ i = 1,\ 2,\ ...,\ m \right\}$ – pirmojo lošėjo strategijų aibę;
- $J = \left\{ j:\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n \right\}$ – antrojo lošėjo strategijų aibę;
- $a_{ij} = u\left(s_1^i,\ s_2^j \right)$, $i \in I$, $j \in J$, – pirmojo lošėjo naudingumo indeksus.

Taigi toliau matricinį lošimą G žymėsime trejetu $\left\langle I,\ J,\ A \right\rangle$.

Matricinio lošimo sprendiniu yra vadinamas balno taškas. Jo egzistavimui tirti galima taikyti bendrąją antagonistinio lošimo balno taško egzistavimo (minimakso) teoremą (4.1 teorema). Aišku, kad skaičiai

$$\underline{v} = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \text{ ir } \overline{v} = \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij}$$

egzistuoja (nes I ir J yra baigtinės aibės), todėl pakanka išsiaiškinti, ar galioja lygybė $\underline{v} = \overline{v}$.

5.1 TEOREMA. Tegu $G = \langle I, J, A \rangle$, $A = (a_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$, yra matricinis lošimas. Situacija $s^\circ = (i_\circ, j_\circ) \in I \cdot J$ yra šio lošimo balno taškas tada ir tik tada, kai

$$a_{i_\circ j_\circ} = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} = \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij} . \quad (5.1)$$

■ **5.1 pavyzdys.** Patikrinkime, ar lošimas $G = \langle I, J, A \rangle$ turi balno tašką, kai

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 8 & 5 \\ -6 & -4 & 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 7 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Raskime visus balno taškus (kai jie egzistuoja).

Sprendimas.

a) $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max\left(\min_j a_{1j}; \min_j a_{2j}\right) = \max(-1; -1) = -1,$

$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min\left(\max_i a_{i1};\ \max_i a_{i2}\right) = \min(1;\ 1) = 1;$

taigi šis lošimas balno taškų neturi (nes $\underline{v} \neq \overline{v}$).

b) $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(2;\ 0) = 2,$

$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(2;\ 3) = 2;$

kadangi $\underline{v} = \overline{v}$, tai šis lošimas balno tašką turi.

Taip pat matome, kad

$\underline{v} = \min_j a_{1j} = a_{11}$, $\overline{v} = \max_i a_{i1} = a_{11}$;

todėl situacija $(1;\ 1)$ yra šio lošimo balno taškas.

c) $\underline{v} = \max(-2;\ -1;\ 4;\ -6) = 4 = \min_j a_{3j} = a_{33},$

$\overline{v} = \min(7;\ 5;\ 4;\ 8;\ 9) = 4 = \max_i a_{i3} = a_{33};$

taigi $(3;\ 3)$ yra šio lošimo balno (vienintelis) taškas.

d) $\underline{v} = \max(4;\ -3;\ -5;\ 4) = 4 = \min_j a_{1j} =$

$= \min_j a_{4j} \in \{a_{11};\ a_{14};\ a_{41};\ a_{44}\},$

$$\overline{v} = \min(4;\ 8;\ 6;\ 4;\ 7) = 4 = \max_i a_{i1} =$$
$$= \max_i a_{i4} \in \{a_{11};\ a_{14};\ a_{41};\ a_{44}\};$$

darome išvadą, kad šis lošimas turi keturis balno taškus – situacijas $(1;\ 1)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$ ir $(4;\ 4)$.

Patyrinėkime lošimą, kuris neturi balno taškų. Tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Šis lošimas iš tiesų neturi balno taškų, nes $\underline{v} \neq \overline{v}$:

$$\underline{v} = \max(-1;\ -2;\ -3;\ -4) = -1,$$
$$\overline{v} = \min(4;\ 5;\ 3;\ 6;\ 5) = 3.$$

Tarkime, kad po tam tikro laiko abu lošėjai turi paskelbti, kokias strategijas pasirinko, ir panagrinėkime galimas svarstymų schemas.

Pirmasis lošėjas, pasirinkdamas $i = 1$, galėtų garantuoti sau išlošį, $\underline{v} = -1$. Šiuo atveju antrajam lošėjui situacija $(1;\ 3)$ yra priimtina, nes $a_{13} < 0$. Tačiau pirmajam palankesnė yra situacija $(2;\ 3)$, kuriai susidarius jis išloštų dydį $a_{23} = 3$. Nujausdamas tokį pirmojo lošėjo elgesį, antrasis lošėjas turėtų keisti savo apsisprendimą ir pasirinkti strategiją $j = 1$. Bet šiuo atveju pirmasis lošėjas pereitų prie $i = 3$, o antrasis – prie $j = 2$. Tada pirmasis sugrįžtų prie $i = 1$, o antrasis – prie $j = 3$. Taigi galėtų susidaryti toks situacijų ciklas:

$$(1;\ 3) \to (2;\ 3) \to (2;\ 1) \to (3;\ 1) \to (3;\ 2) \to (1;\ 2) \to (1;\ 3).$$

Sunku būtų apsispręsti ir antrajam lošėjui. Pradėjęs „saugia“ strategija $j = 3$ (apsaugančia jį nuo didesnio kaip $a_{23} = 3$ pralošio), jis suprastų, kad pirmajam lošėjui reikėtų pasirinkti $i = 2$. Bet tada jam pačiam labiau tiktų $j = 1$. Toliau į svarstymų ratą pakliūna situacijos $(3;\ 1)$, $(3;\ 2)$, $(1;\ 2)$, $(1;\ 3)$ ir $(2;\ 3)$. Taigi susidaro toks ciklas:

$$(2;\ 3) \to (2;\ 1) \to (3;\ 1) \to (3;\ 2) \to (1;\ 2) \to (1;\ 3) \to (2;\ 3).$$

Matome, kad abu ciklai sutampa.

Kaip turėtų elgtis lošėjai, rinkdamiesi strategijas, kai lošimas $G = \langle I,\ J,\ A \rangle$ neturi balno taškų? Viena iš galimybių yra atsitiktinis pasirinkimas (pagal tam tikrą schemą). Tačiau toks elgesys reikštų, kad lošėjų aibės I ir J yra papildomos naujomis strategijomis, kurios lošimų teorijoje yra vadinamos *loterijomis* arba *mišriosiomis strategijomis*.

Pirmojo lošėjo mišriąja strategija (loterija) yra vadinamas vektorius $x = (x_1;\ x_2;\ ...;\ x_m)^T$, kuris tenkina šias sąlygas:

1) $x \ge 0$;

2) $\langle x,\ e \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$;

čia $e = (1;\ 1;\ ...;\ 1)^T \in \mathbb{R}_m$.

Antrojo lošėjo mišrioji strategija yra vektorius $y = (y_1;\ y_2;\ ...;\ y_n)^T$, kuris tenkina šias sąlygas:

1) $y \ge 0$;

2) $\langle y,\ e\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$;

čia $e = (1;\ 1;\ \dots;\ 1)^T \in \mathbb{R}_n$.

Lošėjų strategijų aibes žymėkime atitinkamai X ir Y. Strategijų aibės I ir J yra vadinamos *grynųjų strategijų* aibėmis. Grynąsias strategijas galima užrašyti taip:

$$x^i = (0;\ \dots;\ 0;\ 1;\ 0;\ \dots;\ 0)^T \in \mathbb{R}_m,$$

$$y^j = (0;\ \dots;\ 0;\ 1;\ 0;\ \dots;\ 0)^T \in \mathbb{R}_n;$$

čia vienetai yra atitinkamai i-tojoje ir j-tojoje pozicijose, $i \in I$, $j \in J$.

Tarus, kad analogiškų lošimų serija yra pakankamai ilga ir taikoma ta pati mišriųjų strategijų $x \in X$ ir $y \in Y$ pora $(x;\ y)$, abiejų lošėjų išlošius (pirmojo – išloši, o antrojo – pralošį) galima apibūdinti vidurkiu

$$K(x,\ y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \langle x,\ Ay\rangle = \left\langle A^T x,\ y\right\rangle. \qquad (5.2)$$

Lošimas $H = \langle X,\ Y,\ K\rangle$ yra vadinamas matricinio lošimo $G = \langle I,\ J,\ A\rangle$ *mišriuoju plėtiniu.*

Matricinio lošimo G mišrusis plėtinys H pasižymi tuo, kad nepriklausomai nuo matricos A turi balno tašką.

Iš pradžių įrodysime porą pagalbinių teiginių.

5.1 lema. Situacija $\left(x^{\circ};\ y^{\circ}\right) \in X \times Y$ yra lošimo $G = \langle I,\ J,\ A \rangle$ mišriojo plėtinio $H = \langle X,\ Y,\ K \rangle$ balno taškas tada ir tik tada, kai su visais $i \in I$ ir $j \in J$ galioja sąlyga

$$K\left(x^{i},\ y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ},\ y^{j}\right); \tag{5.3}$$

čia $x^{i} \in X$, $y^{j} \in Y$ yra grynosios strategijos.

▲ ***Įrodymas.*** Prisiminkime, kad pora $\left(x^{\circ};\ y^{\circ}\right) \in X \times Y$ yra lošimo $H = \langle X,\ Y,\ K \rangle$ balno taškas, jeigu galioja sąlyga

$$K\left(x,\ y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ},\ y\right),\ x \in X\ ,\ y \in Y. \tag{5.4}$$

Aišku, kad balno taškas tenkina (5.3) sąlygą.

Nagrinėdami atvirkštinį teiginį, tarkime, kad situacija $\left(x^{\circ};\ y^{\circ}\right) \in X \times Y$ tenkina (5.3) sąlygą su visais $i \in I$ ir $j \in J$.

Iš pradžių pasirinkime bet kurią pirmojo lošėjo mišriąją strategiją $x \in X$. Iš jos komponenčių x_i, $i \in I$, paeiliui padauginkime (5.3) nelygybių sistemos kairiąją nelygybę ir sudėkime rezultatus. Gausime nelygybę

$$\sum_{i=1}^{m} x_i K\left(x^{i},\ y^{\circ}\right) \le \sum_{i=1}^{m} x_i K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right). \tag{5.5}$$

Kadangi

$$\sum_{i=1}^{m} x_i K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right) = K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right) \sum_{i=1}^{m} x_i = K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right)$$

ir

$$\sum_{i=1}^{m} x_i K\left(x^i,\ y^\circ\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left\langle x^i,\ Ay^\circ\right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \left\langle x_i x^i,\ Ay^\circ\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{m} x_i x^i,\ Ay^\circ \right\rangle = \left\langle x,\ Ay^\circ\right\rangle = K\left(x,\ y^\circ\right),$$

tai (5.5) nelygybė reiškia, kad

$$K\left(x,\ y^\circ\right) \le K\left(x^\circ,\ y^\circ\right),\ x \in X\ . \qquad (5.6)$$

Dabar pasirinkime bet kurią antrojo lošėjo strategiją $y \in Y$ ir iš jos komponenčių y_j, $j \in J$, paeiliui padauginkime (5.4) dešiniąją nelygybę. Sudėję rezultatus, gausime nelygybę

$$\sum_{j=1}^{n} y_j K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) \le \sum_{j=1}^{n} y_j K\left(x^\circ,\ y^j\right).$$

Ši nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) \le K\left(x^\circ,\ y\right), \qquad (5.7)$$

nes

$$\sum_{j=1}^{n} y_j K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) = K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) \sum_{j=1}^{n} y_j = K\left(x^\circ,\ y^\circ\right)$$

ir

$$\sum_{j=1}^{n} y_j K\left(x^\circ,\ y^j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left\langle A^T x^\circ,\ y^j\right\rangle = \left\langle A^T x^\circ,\ \sum_{j=1}^{n} y_j y^j \right\rangle =$$

$$= \left\langle A^T x^\circ,\ y\right\rangle = K\left(x^\circ,\ y\right).$$

Sugretinę (5.6) ir (5.7) nelygybes, gauname balno taško sąlygą (5.4).

Taigi strategijų pora $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$, tenkinanti (su visais $i \in I$ ir $j \in J$) (5.3) sąlygą, yra lošimo $H = \left\langle X,\ Y,\ K\right\rangle$ balno taškas. ▼

5.2 lema. Tarkime, kad

1) $m \times n$ matmenų matricų $A = \left(a_{ij}\right)$ ir $\overline{A} = \left(\overline{a}_{ij}\right)$ elementus sieja formulė
$\overline{a}_{ij} = a_{ij} + \lambda$, $i \in I$, $j \in J$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

2) $H = \left\langle X,\ Y,\ K\right\rangle$ yra matricinio lošimo $G = \left\langle I,\ J,\ A\right\rangle$ mišrusis plėtinys, o $\overline{H} = \left\langle X,\ Y,\ \overline{K}\right\rangle$ yra matricinio lošimo $\overline{G} = \left\langle I,\ J,\ \overline{A}\right\rangle$ mišrusis plėtinys.

Situacija $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$ yra lošimo H balno taškas tada ir tik tada, kai ji yra lošimo $\overline{H}$ balno taškas.

▲ ***Įrodymas.*** Patyrinėkime ryšį tarp abiejų mišriųjų plėtinių, H ir $\overline{H}$, lošimo funkcijų. Gausime:

$$\overline{K}\left(x,\ y\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{a}_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \left(a_{ij} + \lambda\right) y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i a_{ij} y_j + x_i \lambda y_j\right) = K\left(x,\ y\right) + \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j =$$

$$= K\left(x,\ y\right) + \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = K\left(x,\ y\right) + \lambda.$$

Taigi

$$\bar{K}(x, y) = K(x, y) + \lambda, \ x \in X, \ y \in Y. \tag{5.8}$$

Tarę, kad $\left(x^{\circ}; y^{\circ}\right) \in X \times Y$ yra lošimo $H = \langle X, Y, K \rangle$ balno taškas, gauname, jog galioja sąlyga

$$K\left(x, y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ}, y^{\circ}\right) \le K\left(x^{\circ}, y\right), \ x \in X, \ y \in Y.$$

Tada su bet kuriuo realiuoju skaičiumi λ galioja sąlyga

$$K\left(x, y^{\circ}\right) + \lambda \le K\left(x^{\circ}, y^{\circ}\right) + \lambda \le K\left(x^{\circ}, y\right) + \lambda,$$
$$x \in X, \ y \in Y.$$

Pagal (5.8) sąryšį ji yra ekvivalenti šiai sąlygai:

$$\bar{K}\left(x, y^{\circ}\right) \le \bar{K}\left(x^{\circ}, y^{\circ}\right) \le \bar{K}\left(x^{\circ}, y\right), \ x \in X, \ y \in Y.$$

Taigi strategijų $x^{\circ} \in X$, $y^{\circ} \in Y$ pora $\left(x^{\circ}; y^{\circ}\right)$ yra lošimo $\bar{H} = \langle X, Y, \bar{K} \rangle$ balno taškas.

Atvirkštinis teiginys įrodomas analogiškai. ▼

5.2 TEOREMA (BALNO TAŠKO EGZISTAVIMO). Bet kurio matricinio lošimo $G = \langle I, J, A \rangle$ mišrusis plėtinys $H = \langle X, Y, K \rangle$ turi balno tašką.

▲ ***Įrodymas.*** Remiantis 5.2 lema galima apsiriboti atveju, kai matricos $A = \left(a_{ij}\right)$, $i \in I$, $j \in J$, visi elementai yra teigiami. Taigi tarkime, kad $a_{ij} > 0$, $i \in I$, $j \in J$.

Sudarykime ir nagrinėkime du tiesinio programavimo uždavinius:

$$\min \langle e,\ u \rangle,$$

$$\text{kai } \begin{cases} A^T u \geq e, \\ \quad u \geq 0; \end{cases} \tag{T}$$

ir

$$\max \langle e,\ w \rangle,$$

$$\text{kai } \begin{cases} A^T w \leq e, \\ \quad w \geq 0; \end{cases} \tag{D}$$

čia $e = (1;\ 1;\ ...;\ 1)^T$ yra arba m-matis, arba n-matis vektorius (priklausomai nuo jo pozicijos uždavinyje).

Nesunku įsitikinti, kad abu šie uždaviniai sudaro dualių uždavinių porą. Leistinąsias aibes pažymėkime atitinkamai U ir W. Aišku, kad $W \neq \varnothing$ (nes $0 \in W$). Aibė U irgi netuščia, nes matricos A visi elementai (pagal prielaidą) yra teigiami. Pagal žinomą tiesinio programavimo dualumo teoremą sąlyga $U \neq \varnothing$ ir $W \neq \varnothing$ reiškia, kad abu uždaviniai, (T) ir (D), turi sprendinius.

Tarkime, kad $u^\circ \in U$ yra (T) uždavinio sprendinys, o $w^\circ \in W$ yra (D) uždavinio sprendinys. Iš tiesinio programavimo teorijos žinome, kad abiejų uždavinių, (T) ir (D), tikslo funkcijų reikšmės optimaliuose taškuose yra lygios. Šią bendrą jų reikšmę pažymėkime d. Taigi

$$\left\langle e,\ u^\circ \right\rangle = \left\langle e,\ w^\circ \right\rangle = d\ . \tag{5.9}$$

Aišku, kad $0 \notin U$, todėl $u^\circ \neq 0;\ d > 0.$

Apibrėžkime vektorius x° ir y° :

$$x^\circ = \frac{u^\circ}{d},\ y^\circ = \frac{w^\circ}{d}.$$

Lengva įsitikinti, kad $x^\circ \in X$, $y^\circ \in Y$. Įrodysime, kad pora $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$ yra mišriojo plėtinio $H = \langle X,\ Y,\ K \rangle$ balno taškas.

Remdamiesi (T) ir (D) uždavinių leistinųjų aibių apibrėžimais ir (5.9) sąlyga, gauname:

1) $\left\langle A^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle = \dfrac{1}{d^2}\left\langle A^T u^\circ,\ w^\circ \right\rangle \ge \dfrac{1}{d^2}\left\langle e,\ w^\circ \right\rangle = \dfrac{1}{d}$;

2) $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle = \dfrac{1}{d^2}\left\langle u^\circ,\ Aw^\circ \right\rangle \le \dfrac{1}{d^2}\left\langle u^\circ,\ e \right\rangle = \dfrac{1}{d}$.

Taigi

$$K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) = \left\langle A^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle = \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle = \frac{1}{d}. \tag{5.10}$$

Toliau:

a) $K\left(x^i,\ y^\circ\right) = \left\langle x^i,\ Ay^\circ \right\rangle = \dfrac{1}{d}\left\langle x^i,\ Aw^\circ \right\rangle \le \dfrac{1}{d}\left\langle x^i,\ e \right\rangle = \dfrac{1}{d}$;

b) $K\left(x^\circ,\ y^j\right) = \left\langle A^T x^\circ,\ y^j \right\rangle = \dfrac{1}{d}\left\langle A^T u^\circ,\ y^j \right\rangle \ge \dfrac{1}{d}\left\langle e,\ y^j \right\rangle = \dfrac{1}{d}$;

čia $i \in I$, $j \in J$, o x^i ir y^j yra lošėjų grynosios strategijos.

Sugretinę gautąsias nelygybes su (5.10), darome išvadą, kad su visomis lošėjų grynosiomis strategijomis $x^i \in X$ ir $y^j \in Y$, $i \in I$, $j \in J$, galioja nelygybių sistema

$$K\left(x^i,\ y^\circ\right) \le K\left(x^\circ,\ y^\circ\right) \le K\left(x^\circ,\ y^j\right).$$

Pagal 5.1 lemą pora $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$ yra matricinio lošimo $G = \langle I,\ J,\ A \rangle$ mišriojo plėtinio $H = \langle X,\ Y,\ K \rangle$ balno taškas. ▼

6. Matricinių lošimų sprendimas

Nagrinėkime matricinį lošimą $G = \langle I, J, A \rangle$ ir jo mišrųjį plėtinį $H = \langle X, Y, K \rangle$.

Matricinio lošimo G sprendimo tikslas yra rasti jo balno tašką $(i_\circ; j_\circ)$ ir lošimo vertę – skaičių $v_\circ = a_{i_\circ j_\circ}$. Lošimo vertė $v_\circ$ yra pirmojo lošėjo išlošis ir antrojo lošėjo pralošis.

Kai lošimas G balno taško neturi, yra sprendžiamas jo mišrusis plėtinys $H = \langle X, Y, K \rangle$. Šiuo atveju lošimo G sprendiniu yra vadinamas mišriojo plėtinio H balno taškas $\left(x^\circ; y^\circ\right) \in X \times Y$. Lošimo vertė yra $v_\circ = K\left(x^\circ, y^\circ\right)$.

Remiantis 5.2 teoremos įrodymo analize, galima sukonstruoti tokią matricinio lošimo G sprendimo schemą, kai lošimas G neturi balno taškų:

- patikrinti, ar lošimo G matricoje A yra neigiamų elementų; prireikus – pasirinkti skaičių $\lambda > 0$, su kuriuo $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \lambda > 0$, kai $i \in I$, $j \in J$, ir toliau nagrinėti lošimą $\bar{G} = \langle I, J, \bar{A} \rangle$, $\bar{A} = \left(\bar{a}_{ij}\right)$, $i \in I$, $j \in J$;
- sudaryti ir išspręsti du tiesinio programavimo uždavinius:

  1) $\min\left\{\langle e, u \rangle : u \in U\right\}$, $U = \left\{u \in \mathbb{R}_m : A^T u \geq e,\ u \geq 0\right\}$ (T)

  ir

  2) $\max\left\{\langle e, w \rangle : w \in W\right\}$, $W = \left\{w \in \mathbb{R}_n : Aw \leq e,\ w \geq 0\right\}$; (D)
- apskaičiuoti

  $d = \left\langle e, u^\circ \right\rangle = \left\langle e, w^\circ \right\rangle$

(čia u° yra tiesioginio uždavinio sprendinys, o w° – dualiojo uždavinio sprendinys);

- sudaryti vektorius

$$x^{\circ} = \frac{u^{\circ}}{d} \text{ ir } y^{\circ} = \frac{w^{\circ}}{d}.$$

Vektorių x° ir y° pora $\left(x^{\circ};\ y^{\circ}\right)$ priklauso mišriojo plėtinio $H = \langle X,\ Y,\ K\rangle$ situacijų aibei $X \times Y$ ir yra šio lošimo balno taškas. Lošimo vertė apskaičiuojama pagal formulę $v_{\circ} = K\left(x^{\circ},\ y^{\circ}\right) = \left\langle x^{\circ},\ Ay^{\circ}\right\rangle$.

Tiesinio programavimo uždavinius, (T) ir (D), galima spręsti taikant simplekso arba dualųjį simplekso metodą. Kai lošimo *G* matricos *A* matmenys yra $2\times n$ arba $m\times 2$, galima taikyti ir grafinį metodą.

■ **6.1 pavyzdys.** Išspręskime matricinį lošimą *G*, kai lošimo matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Šis lošimas balno taškų neturi, nes

$$\underline{v} = \max(-1;\ -2) = -1,\ \overline{v} = \min(6;\ 3;\ 1;\ 5) = 1.$$

Toliau nagrinėkime mišrųjį plėtinį $H = \langle X,\ Y,\ K\rangle$. Lošėjų strategijų aibės yra

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} :\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \text{ ir } x_1 + x_2 = 1 \right\},$$

$$Y=\{y=(y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4)^T:\ y_j\ge 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4=1\},$$

o lošimo funkcija

$$K(x,\ y)=\langle x,\ Ay\rangle=x_1(6y_1+3y_2+y_3-y_4)+$$
$$+x_2(-2y_1+y_2+5y_4).$$

Mišriojo plėtinio balno taškui rasti taikykime tiesinį programavimą.

Matricoje A yra neigiamų elementų, todėl pasirinkime teigiamą skaičių, pavyzdžiui, $\lambda=3$, kurį pridėję prie mažiausiojo elemento gautume teigiamą skaičių. Taigi matricą A pakeiskime matrica

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}6+\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda & -1+\lambda\\ -2+\lambda & 1+\lambda & 0+\lambda & 5+\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 4 & 2\\ 1 & 4 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

Dabar sudarykime du tiesinio programavimo uždavinius:

- $\min(u_1+u_2)$, kai

$$\begin{cases}9u_1+\ u_2\ge 1,\\ 6u_1+4u_2\ge 1,\\ 4u_1+3u_2\ge 1,\\ 2u_1+8u_2\ge 1,\\ u_1\ge 0,\ u_2\ge 0;\end{cases}\qquad\text{(T)}$$

- $\max(w_1+w_2+w_3+w_4)$, kai

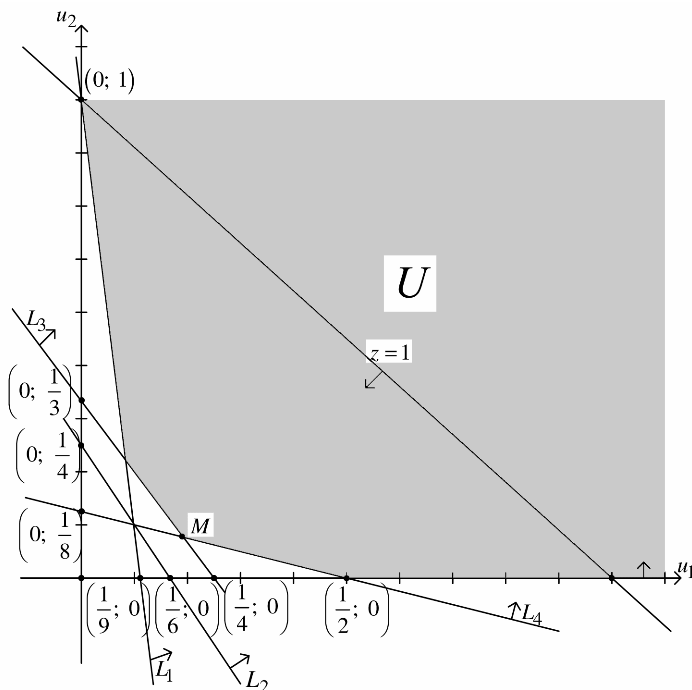
$$\begin{cases}9w_1+6w_2+4w_3+2w_4\le 1,\\ \ w_1+4w_2+3w_3+8w_4\le 1,\\ w_j\ge 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.\end{cases}\qquad\text{(D)}$$

Tiesioginį uždavinį (T) spręskime grafiniu metodu. Pavaizduokime Dekarto koordinačių plokštumoje šio uždavinio leistinąją aibę (žr. 6.1 pav.) ir tirkime tikslo funkcijos $z = u_1 + u_2$ reikšmių kitimą braižydami lygio tieses (6.1 pav. yra nubrėžta lygio tiesė $z = 1$ ir rodykle prie jos pažymėta aibės U dalis, kurioje tikslo funkcijos $z = u_1 + u_2$ reikšmės mažesnės už 1). Tyrimo rezultatas toks: tikslo funkcija $z = u_1 + u_2$ mažiausią reikšmę įgyja taške M. Jame susikerta tiesės L_3 ir L_4, kurių lygtys yra $4u_1 + 3u_2 = 1$ ir $2u_1 + 8u_2 = 1$. Šios lygtys turi vienintelį bendrą sprendinį – skaičių porą $\left(\frac{5}{26};\ \frac{1}{13}\right)$. Tikslo funkcijos reikšmė šiame taške yra $z = \frac{7}{26}$. Vadinasi, optimali pirmojo lošėjo strategija yra $x^\circ = \left(\frac{5}{7};\ \frac{2}{7}\right)^T$.

Dualųjį uždavinį (D) nesunku išspręsti simplekso metodu. Iš pradžių (D) uždavinį reikia pakeisti ekvivalenčiu kanoniniu uždaviniu:

$$\min\left(-w_1 - w_2 - w_3 - w_4\right), \text{ kai}$$

$$\begin{cases} 9w_1 + 6w_2 + 4w_3 + 2w_4 + w_5 \qquad = 1, \\ w_1 + 4w_2 + 3w_3 + 8w_4 \qquad + w_6 = 1, \\ w_j \geq 0,\ j = 1,\ \ldots,\ 6. \end{cases} \qquad (\mathrm{D}_1)$$



6.1 pav.

Šio uždavinio leistinąją aibę pažymėkime W_1. Taškas w^{o} = (0; 0; 0; 0; 1; 1)^T yra šios aibės kraštutinis taškas. Jo bazės matrica *B* yra vienetinė, todėl nesunku sudaryti pirmąją simplekso lentelę (žr. 6.1 lent.). Taikydami simplekso metodą, sudarome dar dvi lenteles (žr. 6.2 lent. ir 6.3 lent.) ir gauname (D_1) uždavinio sprendinį $\overline{w} = \left(0;\ 0;\ \frac{3}{13};\ \frac{1}{26};\ 0;\ 0\right)^T \in W_1$. Tada (D) uždavinio sprendinys yra $\overline{w} = \left(0;\ 0;\ \frac{3}{13};\ \frac{1}{26}\right)^T$, optimali tikslo funkcijos

reikšmė lygi $\frac{7}{26}$, o ieškoma antrojo lošėjo optimali strategija yra

$$y^{\circ} = \left(0;\ 0;\ \frac{6}{7};\ \frac{1}{7}\right)^T.$$

6.1 lentelė

		c_D	-1	-1	-1	-1		
B	c_B	w_B°	A^1	A^2	A^3	A^4	λ	
a^5	0	1	9	6	(4)	2	$1/4$	$\leftarrow i_{\circ}$
a^6	0	1	1	4	3	8	$1/3$	
		z_D	0	0	0	0		
		Δ_D	-1	-1	-1	-1		
					$\uparrow j_{\circ}$			

6.2 lentelė

		c_D	-1	-1	0	-1		
B	c_B	w_B^1	A^1	A^2	A^5	A^4	λ	
a^3	-1	$1/4$	$9/4$	$3/2$	$1/4$	$1/2$	$1/2$	
a^6	0	$1/4$	$-23/4$	$-1/2$	$-3/4$	($13/2$)	$1/26$	$\leftarrow i_{\circ}$
		z_D	$-9/4$	$-3/2$	$-1/4$	$-1/2$		
		Δ_D	$5/4$	$1/2$	$1/4$	$-1/2$		
						$\uparrow j_{\circ}$		

6.3 lentelė

		c_D	-1	-1	0	0	
B	c_B	w_B^2	A^1	A^2	A^5	A^6	λ
a^3	-1	$3/13$	$35/13$	$20/13$	$4/13$	$-1/3$	
a^4	-1	$1/26$	$-23/26$	$-1/13$	$-3/26$	$2/13$	
		z_D	$-47/26$	$-19/13$	$-5/26$	$-1/13$	
		Δ_D	$21/26$	$6/13$	$5/26$	$1/13$	

Apskaičiuokime lošimo funkcijos $K(x,\ y)$ reikšmę balno taške:

$$K\left(x^\circ,\ y^\circ\right)=\frac{5}{7}\left(6\cdot 0+3\cdot 0+\frac{6}{7}-\frac{1}{7}\right)+\frac{2}{7}\left(-2\cdot 0+0+5\cdot\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7}.$$

Atsakymas toks: pirmojo lošėjo optimali strategija yra $x^\circ=\left(\frac{5}{7};\ \frac{2}{7}\right)^T$, antrojo – $y^\circ=\left(0;\ 0;\ \frac{6}{7};\ \frac{1}{7}\right)^T$, o lošimo vertė yra $v_\circ=K\left(x^\circ,\ y^\circ\right)=\frac{5}{7}$.

■ **6.2 pavyzdys.** Išspręskime matricinį lošimą G, kai lošimo matrica yra

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Šį uždavinį spręskime kitaip – remdamiesi bendrąja balno taško samprata.

Tarkime, kad pirmasis lošėjas renkasi strategiją $x = (\alpha;\ 1-\alpha)^T$, $0 \le \alpha \le 1$, o antrasis – grynąją strategiją y^j, $j \in \{1;\ 2\}$. Gauname dvi situacijas: $(x;\ y^1)$ ir $(x;\ y^2)$. Funkcijos $K(x,\ y) = \langle x,\ Ay \rangle$ reikšmės yra tokios:

$$K(x,\ y^1) = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 5\alpha - 3(1-\alpha) = 8\alpha - 3,$$

$$K(x,\ y^2) = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\alpha + 2(1-\alpha) = 2 - 3\alpha .$$

Aišku, kad pirmojo lošėjo tikslas yra rasti tokią α reikšmę $\alpha_\circ$, $\alpha_\circ \in [0;\ 1]$, su kuria galiotų lygybė

$$\min(8\alpha_\circ - 3;\ 2 - 3\alpha_\circ) = \max_{\alpha \in [0;\ 1]} \min(8\alpha - 3;\ 2 - 3\alpha). \quad (6.1)$$

Pagal balno taško apibrėžimą skaičius

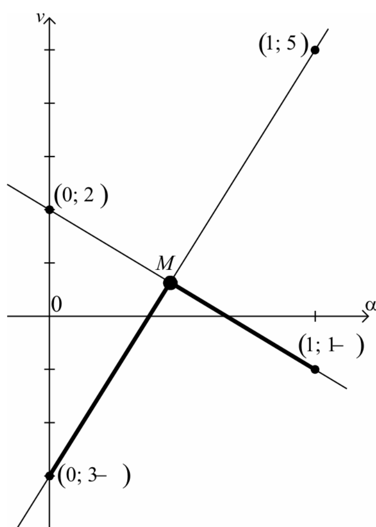
$$v_\circ = \min(8\alpha_\circ - 3;\ 2 - 3\alpha_\circ)$$

yra lošimo *G* mišriojo plėtinio *H* (todėl ir lošimo *G*) vertė.

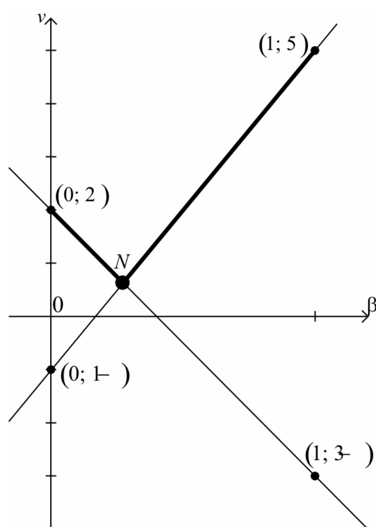
Uždavinį (6.1) spręskime grafiškai. Pirmiausia nubrėžkime tieses $v = 8\alpha - 3$ ir $v = 2 - 3\alpha$ (žr. 6.2 pav.). Funkcijos $v = \min(8\alpha - 3;\ 2 - 3\alpha)$ grafikas yra tiesių $v = 8\alpha - 3$ ir $v = 2 - 3\alpha$ gaubiamoji iš apačios. Nesunku rasti jos maksimumą. Taško *M* koordinatės yra tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} v = 8\alpha - 3, \\ v = 2 - 3\alpha \end{cases}$$

sprendinys $\left(\frac{5}{11}; \frac{7}{11}\right)$. Taigi $\alpha_\circ = \frac{5}{11}$, $v_\circ = \frac{7}{11}$. Tai reiškia, kad optimali pirmojo lošėjo strategija yra $x^\circ = \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{11}\right)^T$, o lošimo vertė (pirmojo lošėjo išlošių vidurkis) yra $v_\circ = \frac{7}{11}$.



6.2 pav.



6.3 pav.

Analogiškai galima rasti optimalią antrojo lošėjo strategiją. Tegu $y = (\beta;\ 1-\beta)^T$, $\beta \in [0;\ 1]$, yra kuri nors antrojo lošėjo mišrioji strategija, o pirmasis lošėjas renkasi grynąją strategiją x^i, $i \in \{1;\ 2\}$. Tada

$$K\left(x^1,\ y\right)=\left\langle A^T x^1,\ y\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\beta\\ 1-\beta\end{pmatrix}\right\rangle=$$
$$=5\beta-\left(1-\beta\right)=6\beta-1,$$
$$K\left(x^2,\ y\right)=\left\langle A^T x^2,\ y\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\beta\\ 1-\beta\end{pmatrix}\right\rangle=$$
$$=-3\beta+2\left(1-\beta\right)=2-5\beta.$$

Antrojo lošėjo tikslas yra rasti tokią β reikšmę $\beta_\circ$, $\beta_\circ\in\left[0;\ 1\right]$, kad galiotų lygybė:

$$\max\left(6\beta_\circ-1;\ 2-5\beta_\circ\right)=\min_{\beta\in\left[0;\ 1\right]}\max\left(6\beta-1;\ 2-5\beta\right). \quad (6.2)$$

Funkcijos $v=\max\left(6\beta-1;\ 2-5\beta\right)$ grafikas intervale $\left[0;\ 1\right]$ yra tiesių $v=6\beta-1$ ir $v=2-5\beta$ gaubiamoji iš viršaus (žr. 6.3 pav.). Šios gaubiamosios taško N ordinatė yra mažiausia, todėl (6.2) uždavinio sprendiniui rasti reikia išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases}v=6\beta-1,\\ v=2-5\beta.\end{cases}$$

Gauname skaičių porą $\left(\frac{3}{11};\ \frac{7}{11}\right)$. Vadinasi, $\beta_\circ=\frac{3}{11}$, $v_\circ=\frac{7}{11}$, o antrojo lošėjo optimali strategija yra $y^\circ=\left(\frac{3}{11};\ \frac{8}{11}\right)^T$. Lošimo vertė $v_\circ=\frac{7}{11}$ antrajam lošėjui yra jo pralošis.

Sprendžiant matricinius lošimus, ypač jų mišriuosius plėtinius, yra aktuali lošimo matricos $A=\left(a_{ij}\right)$, $i\in I$, $j\in J$, matmenų

problema. Susipažinkime su viena galimybe sumažinti matricos matmenis.

Tegu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yra lošimo G matrica. Sakoma, kad šios matricos

- *i-toji eilutė* $(a_{i1};\ a_{i2};\ \dots;\ a_{in})$ *dominuoja k-tosios eilutės atžvilgiu* $(a_{k1};\ a_{k2};\ \dots;\ a_{kn})$, $k \neq i$, jeigu
  $$a_{i1} \geq a_{k1},\ a_{i2} \geq a_{k2},\ \dots,\ a_{in} \geq a_{kn}; \qquad (6.3)$$
- *j-asis stulpelis* $(a_{1j};\ a_{2j};\ \dots;\ a_{mj})^T$ *dominuoja l-tojo stulpelio atžvilgiu*, jeigu
  $$a_{1j} \leq a_{1l},\ a_{2j} \leq a_{2l},\ \dots,\ a_{mj} \leq a_{ml}. \qquad (6.4)$$

Kai galioja (6.3) sąlyga, galima sakyti, kad pirmojo lošėjo grynoji strategija x^i dominuoja jo grynosios strategijos x^k atžvilgiu; $i,\ k \in I$. Analogiškai, kai galioja (6.4) sąlyga, galima sakyti, kad antrojo lošėjo strategija y^j dominuoja grynosios strategijos y^l atžvilgiu ($j,\ l \in J$). Minėtais atvejais strategijos x^k ir y^l yra dominuojamos, todėl jų lošėjai ir nesirinks.

■ **6.3 pavyzdys.** Išspręskime matricinį lošimą G, kai jo matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 42 & 27 & 30 \\ 24 & 30 & 42 & 25 & 23 \\ 25 & 28 & 36 & 27 & 28 \\ 29 & 31 & 29 & 25 & 36 \\ 30 & 33 & 31 & 26 & 35 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Matome, kad šis lošimas balno taškų neturi, nes

$$\underline{v} = \max\left(25;\ 24;\ 25;\ 25;\ 26\right) = 26,$$

$$\overline{v} = \min\left(30;\ 33;\ 36;\ 27;\ 30\right) = 27;$$

taigi $\underline{v} \neq \overline{v}$.

Pradėdami ieškoti mišriojo plėtinio $H = \left\langle X,\ Y,\ K \right\rangle$ sprendinio, peržiūrėkime matricos A elementus ir pastebėsime, kad

- pirmoji eilutė dominuoja antrosios ir trečiosios eilučių atžvilgiu;
- pirmasis stulpelis dominuoja antrojo ir trečiojo stulpelių atžvilgiu.

Dominuojamas eilutes ir dominuojamus stulpelius pašalinkime ir gausime mažesnių matmenų matricą

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 27 & 30 \\ 29 & 25 & 36 \\ 30 & 26 & 35 \end{pmatrix}.$$

Dabar matome, kad trečiojo stulpelio atžvilgiu dominuoja ir pirmas, ir antras stulpelis. Pašalinę trečiąjį stulpelį, gauname matricą

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 27 \\ 29 & 25 \\ 30 & 26 \end{pmatrix}.$$

O šioje matricoje trečioji eilutė dominuoja antrosios atžvilgiu, todėl gauname 2×2 matmenų matricą

$$D=\begin{pmatrix}25 & 27\\ 30 & 26\end{pmatrix}.$$

Remiantis 5.2 lema šios matricos elementus galima sumažinti, pavyzdžiui, dydžiu $\lambda=25$, ir gauti strategiškai ekvivalentų (turintį tą pačią balno taškų aibę) lošimą, kurio matrica yra

$$\overline{D}=\begin{pmatrix}25-\lambda & 27-\lambda\\ 30-\lambda & 26-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$$

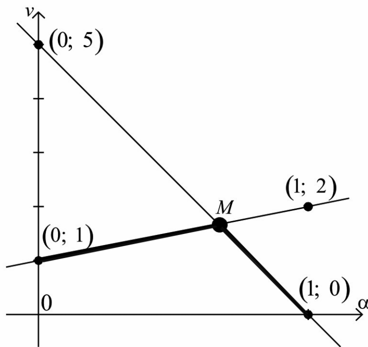
Belieka išspręsti matricinio lošimo, kurio matrica $\overline{D}$, mišrųjį plėtinį. Pirmojo lošėjo optimalią strategiją $\overline{x}=\left(2/3;\ 1/3\right)^T$ randame iš uždavinio

$$\min\left(5-5\alpha_\circ;\ 1+\alpha_\circ\right)=\max_{\alpha\in[0;\,1]}\min\left(5-5\alpha;\ 1+\alpha\right),\qquad(6.5)$$

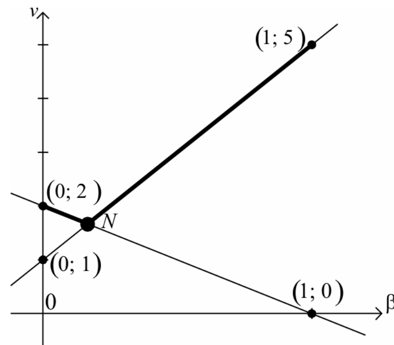
o antrojo lošėjo optimalią strategiją $\overline{y}=\left(1/6;\ 5/6\right)^T$ randame iš uždavinio

$$\max\left(2-2\beta_\circ;\ 1+4\beta_\circ\right)=\min_{\beta\in[0;\,1]}\max\left(2-2\beta;\ 1+4\beta\right).\qquad(6.6)$$

Abu šiuos uždavinius nesunku išspręsti taikant grafinį metodą (žr. 6.4 pav. ir 6.5 pav.). Lošimo vertė yra $\overline{v}_\circ=\dfrac{5}{3}$.



6.4 pav.



6.5 pav.

Pagal gautuosius atsakymus reikia parašyti pradinio lošimo sprendinį – jo balno tašką $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$ ir lošimo vertę $v_\circ$. Gausime

$$x^\circ = \left(\frac{2}{3};\ 0;\ 0;\ 0;\ \frac{1}{3}\right)^T,\ y^\circ = \left(\frac{1}{6};\ 0;\ 0;\ \frac{5}{6};\ 0\right)^T,$$

$$v_\circ = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

Pastaba. Pradinė lošimo $G = \langle I,\ J,\ A\rangle$ matricos A analizė 6.3 pavyzdyje buvo labai naudinga. Lošimo sprendiniui rasti pakako taikyti grafinį metodą (jo teorinis pagrindas – 5.1 lema). Sprendžiant 6.1 pavyzdyje nagrinėtą lošimą irgi buvo galima sumažinti matricos matmenis, nes matricos

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

trečiasis stulpelis dominuoja antrojo stulpelio atžvilgiu. Žinoma, nepastebėjus tokios galimybės, atsakymas gaunamas tas pats; tik padaugėja skaičiavimo bei rašymo.

7. Bimatriciai lošimai

Bimatriciu lošimu yra vadinamas nenulinės sumos dviejų asmenų lošimas su baigtinėmis strategijų aibėmis.

Tegu $I = \{1;\ 2;\ ...;\ m\}$ yra pirmojo lošėjo, o $J = \{1;\ 2;\ ...;\ n\}$ – antrojo lošėjo strategijų aibė. Tada pirmojo lošėjo išlošius galima užrašyti $m \times n$ matmenų matricos $A = \left(a_{ij}\right)$ elementais, o antrojo lošėjo – $m \times n$ matmenų matricos $B = \left(b_{ij}\right)$ elementais.

Bimatricį lošimą žymėsime simboliu

$$G = \langle I,\ J,\ A,\ B \rangle.$$

Bimatricio lošimo G mišrusis plėtinys $H = \langle X,\ Y,\ K_1,\ K_2 \rangle$ yra apibūdinamas lošėjų mišriųjų strategijų aibėmis

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}_m :\ x \geq 0,\ \langle x,\ e \rangle = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_n :\ y \geq 0,\ \langle y,\ e \rangle = 1 \right\}$$

bei išlošių (naudingumo) funkcijomis

$$K_1(x,\ y) = \langle x,\ Ay \rangle \text{ ir } K_2(x,\ y) = \langle x,\ By \rangle;$$

čia $x \in X$, $y \in Y$.

Tiek bimatricio lošimo *G*, tiek jo mišriojo plėtinio *H* sprendiniu vadinsime kiekvieną Nešo pusiausvyros situaciją, t. y. strategijų $x^\circ \in X$ ir $y^\circ \in Y$ porą $\left(x^\circ;\ y^\circ\right)$, kuri tenkina šias sąlygas:

$$K_1\left(x, y^\circ\right) \leq K_1\left(x^\circ, y^\circ\right),\ x \in X, \tag{7.1}$$

ir

$$K_2\left(x^\circ, y\right) \leq K_2\left(x^\circ, y^\circ\right), \; y \in Y. \qquad (7.2)$$

Nesunku rasti bimatricių lošimų, turinčių bent vieną pusiausvyros (Nešo pusiausvyros) situaciją, ir tokių, kurie neturi nė vienos pusiausvyros situacijos. Pavyzdžiui, lošimas G, kurio matricos yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},$$

turi dvi pusiausvyros situacijas – strategijų porą $(1;\, 2)$ ir $(2;\, 1)$. O bimatricis lošimas, kurio matricos yra

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

pusiausvyros situacijų neturi.

7.1 TEOREMA (NEŠO). Bet kurio bimatricio lošimo $G = \langle I,\, J,\, A,\, B\rangle$ mišrusis plėtinys $H = \langle X,\, Y,\, K_1,\, K_2\rangle$ turi pusiausvyros situaciją.

▲ ***Įrodymas.*** Tegu $(x;\, y) \in X \times Y$ yra bet kuri lošimo H situacija. Pažymėkime:

- $$\gamma_i = \max\left(\left\langle x^i - x,\, Ay\right\rangle;\; 0\right),\; i \in I; \qquad (7.3)$$
- $$\delta_j = \max\left(\left\langle B^T x,\, y^j - y\right\rangle;\; 0\right),\; j \in J; \qquad (7.4)$$
- $$x_i' = \frac{x_i + \gamma_i}{1 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i},\; y_j' = \frac{y_j + \delta_j}{1 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j}. \qquad (7.5)$$

Aišku, kad atvaizdis $T(x, y) = (x'; y')$, $(x, y) \in X \times Y$, yra tolydus aibės $X \times Y$ atvaizdis. Lengva įsitikinti, kad aibė $X' \times Y'$ taip pat yra situacijų aibė. Todėl $T(x, y) = (x'; y')$, $(x, y) \in X \times Y$, yra aibės $X \times Y$ atvaizdis savimi.

Įrodysime, kad lygybė

$$(x'; y') = (x; y)$$

galioja tada ir tik tada, kai $(x; y)$ yra lošimo H pusiausvyros situacija.

Tarkime, kad $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ yra pusiausvyros situacija. Pagal apibrėžimą tada galioja nelygybės:

$$K_1\left(x^i, y^\circ\right) = \left\langle x^i, Ay^\circ \right\rangle \le \left\langle x^\circ, Ay^\circ \right\rangle = K_1\left(x^\circ, y^\circ\right), \text{ kai } i \in I,$$

$$K_2\left(x^\circ, y^j\right) = \left\langle B^T x^\circ, y^j \right\rangle \le \left\langle x^\circ, By^\circ \right\rangle = K_2\left(x^\circ, y^\circ\right), \text{ kai } j \in J.$$

Vadinasi,

$$\left\langle x^i - x^\circ, Ay^\circ \right\rangle = \left\langle x^i, Ay^\circ \right\rangle - \left\langle x^\circ, Ay^\circ \right\rangle \le 0, \text{ kai } i \in I,$$

ir

$$\left\langle B^T x^\circ, y^j - y^\circ \right\rangle = \left\langle B^T x^\circ, y^j \right\rangle - \left\langle B^T x^\circ, y^\circ \right\rangle \le 0, \text{ kai } j \in J.$$

Pagal (7.3) ir (7.4) gauname: $\gamma_i = 0$, kai $i \in I$, ir $\delta_j = 0$, kai $j \in J$. Todėl $T\left(x^\circ, y^\circ\right) = \left(x^\circ; y^\circ\right)$.

Tarkime, kad $\left(x^\circ; y^\circ\right) \in X \times Y$ nėra lošimo H pusiausvyros situacija. Vadinasi, yra situacija, sakykime, $\left(\overline{x}; \overline{y}\right) \in X \times Y$, tenkinanti nelygybę

$\left\langle \overline{x},\ Ay^\circ \right\rangle > \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle$ arba $\left\langle B^T x^\circ,\ \overline{y} \right\rangle > \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle$.

Nagrinėkime pirmą atvejį. Kadangi $\left\langle \overline{x},\ Ay^\circ \right\rangle$ yra skaičių $\left\langle x^i,\ Ay^\circ \right\rangle$, $i \in I$, vidurkis, tai būtinai $\left\langle x^i,\ Ay^\circ \right\rangle > \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle$ su kuriuo nors $i \in I$; todėl (pagal (7.3)) $\gamma_i > 0$. Turėdami mintyje, kad $\gamma_i \geq 0$ su visais $i \in I$, gauname $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i > 0$.

Skaičius $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle$ taip pat yra skaičių $\left\langle x^i,\ Ay^\circ \right\rangle$, $i \in I$, vidurkis, todėl su kuriuo nors $i \in I$ galioja nelygybės $x_i^\circ > 0$ ir $\left\langle x^i,\ Ay^\circ \right\rangle \leq \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle$. Bet su šiuo indeksu i gautume $\gamma_i = 0$; tada (turint mintyje, kad $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i > 0$)

$$x_i' = \frac{x_i^\circ}{1 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_k} < x_i^\circ$$

ir $x' \neq x^\circ$. ▼

Analogiškai galima įrodyti, kad $y' \neq y^\circ$, kai $\left\langle B^T x^\circ,\ \overline{y} \right\rangle >$ $> \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle$ su kuria nors strategija $\overline{y} \in Y$.

Įrodydami atvirkštinį teiginį, remsimės **Brauerio teorema:**

Jei $S \subset \mathbb{R}_K$ yra iškila kompaktinė aibė, o φ yra tolydus aibės S atvaizdis savimi, tai aibėje S egzistuoja nejudamas taškas, t. y. taškas $\overline{x} \in S$, kuriame galioja lygybė $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$.

Akivaizdu, kad atvaizdis $T(x, y)$, $(x; y) \in X \times Y$, apibrėžtas (7.5) formulėmis, tenkina Brauerio teoremos sąlygas; taigi yra tokia strategijų pora, sakykime, $\left(x^\circ; y^\circ\right) \in X \times Y$, kuri tenkina lygybę

$$T\left(x^\circ, y^\circ\right) = \left(x^\circ; y^\circ\right). \tag{7.6}$$

Ši lygybė reiškia, kad $\gamma_i = 0$, kai $i \in I$, ir $\delta_j = 0$, kai $j \in J$. Iš (7.3) ir (7.4) darome išvadą, kad

$$\left\langle x^i - x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle \le 0,\ \text{kai}\ i \in I,$$

ir

$$\left\langle B^T x^\circ,\ y^j - y^\circ \right\rangle \le 0,\ \text{kai}\ j \in J;$$

taigi

$$K_1\left(x^i, y^\circ\right) \le K_1\left(x^\circ, y^\circ\right),\ \text{kai}\ i \in I,$$

ir

$$K_2\left(x^\circ, y^j\right) \le K_2\left(x^\circ, y^\circ\right),\ \text{kai}\ j \in J.$$

Iš čia gauname, kad

$$K_1\left(x, y^\circ\right) \le K_1\left(x^\circ, y^\circ\right),\ \text{kai}\ x \in X,$$

ir

$$K_2\left(x^\circ, y\right) \le K_2\left(x^\circ, y^\circ\right),\ \text{kai}\ y \in Y.$$

Taigi situacija $\left(x^{\circ}; y^{\circ}\right)$, tenkinanti (7.6) lygybę, yra mišriojo plėtinio H pusiausvyros situacija.

7.2 TEOREMA. Strategijų $x^{\circ} \in X$, $y^{\circ} \in Y$ pora $\left(x^{\circ}; y^{\circ}\right)$ yra bimatricio lošimo $G = \langle I, J, A, B\rangle$ mišriojo plėtinio $H = \langle X, Y, K_1, K_2\rangle$ pusiausvyros situacija tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie realieji skaičiai α ir β, su kuriais galioja šios sąlygos:

$$Ay^{\circ} \le \alpha e, \; B^T x^{\circ} \le \beta e, \; \left\langle x^{\circ}, \; \left(A+B\right) y^{\circ}\right\rangle = \alpha + \beta. \tag{7.7}$$

▲ ***Įrodymas. Būtinumas.*** Tarkime, kad $\left(x^{\circ}; y^{\circ}\right)$ yra lošimo H pusiausvyros situacija. Pagal apibrėžimą, t. y. iš sąlygų

$$\left\langle x, Ay^{\circ}\right\rangle \le \left\langle x^{\circ}, Ay^{\circ}\right\rangle, \text{ kai } x \ge 0 \text{ ir } \langle x, e\rangle = 1,$$

ir

$$\left\langle B^T x^{\circ}, y\right\rangle \le \left\langle B^T x^{\circ}, y^{\circ}\right\rangle, \text{ kai } y \ge 0 \text{ ir } \langle y, e\rangle = 1,$$

gauname

$$\left\langle x^{i}, Ay^{\circ}\right\rangle \le \left\langle x^{\circ}, Ay^{\circ}\right\rangle, \text{ kai } i \in I,$$

ir

$$\left\langle B^T x^{\circ}, y^{j}\right\rangle \le \left\langle B^T x^{\circ}, y^{\circ}\right\rangle, \text{ kai } j \in J.$$

Iš čia išplaukia nelygybės

$$Ay^{\circ} \le \left\langle x^{\circ}, Ay^{\circ}\right\rangle e \text{ ir } B^T x^{\circ} \le \left\langle x^{\circ}, By^{\circ}\right\rangle e. \tag{7.8}$$

Pažymėkime

$$\alpha = \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle,\ \beta = \left\langle x^\circ,\ By^\circ \right\rangle.$$

Tada $\alpha + \beta = \left\langle x^\circ,\ \left(A + B\right) y^\circ \right\rangle$.

Iš (7.8) gauname ir kitas dvi (7.7) sistemos sąlygas:

$$Ay^\circ \le \alpha e \text{ ir } B^T x^\circ \le \beta e .$$

Pakankamumas. Tarkime, kad su kuriais nors realiaisiais skaičiais α ir β strategijų $x^\circ \in X$ ir $y^\circ \in Y$ pora $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ tenkina (7.7) sąlygas. Įrodysime, kad ši strategijų pora yra lošimo G mišriojo plėtinio H pusiausvyros situacija.

Tegu $x \in X$ ir $y \in Y$ yra bet kurios lošėjų strategijos. Tada, remdamiesi (7.7) sąlygomis, gauname:

- $\left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle \le \alpha$ (nes $\left\langle x,\ \alpha e \right\rangle = \alpha \left\langle x,\ e \right\rangle = \alpha$);
- $\left\langle B^T x^\circ,\ y \right\rangle \le \beta$;
- $\left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle x^\circ,\ By \right\rangle \le \alpha + \beta = \left\langle x^\circ,\ \left(A + B\right) y^\circ \right\rangle$.

Iš čia

$$\left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle x^\circ,\ By \right\rangle \le \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle x^\circ,\ By^\circ \right\rangle .$$

Kai $y = y^\circ$, gauname nelygybę $\left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle \le \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle$; kai $x = x^\circ$, gauname kitą pusiausvyros situacijos apibrėžimo nelygybę $\left\langle x^\circ,\ By \right\rangle \le \left\langle x^\circ,\ By^\circ \right\rangle$. ▼

7.3 TEOREMA. Strategijų $x^\circ \in X$ ir $y^\circ \in Y$ pora $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ yra bimatricio lošimo $G = \langle I, J, A, B \rangle$ mišriojo plėtinio $H = \langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ pusiausvyros situacija tada ir tik tada, kai egzistuoja realieji skaičiai α ir β, su kuriais rinkinys $\left(x^\circ; y^\circ; \alpha; \beta\right)$ yra netiesinio optimizavimo uždavinio

$$\max\left(\langle x,\ (A+B)\,y\rangle - \alpha - \beta\right),$$

kai

$$\begin{cases} Ay \le \alpha e, \\ B^T x \le \beta e, \\ \langle x,\ e\rangle = 1, \\ \langle y,\ e\rangle = 1, \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \end{cases} \tag{7.9}$$

sprendinys, tenkinantis sąlygą $\left\langle x^\circ,\ (A+B)\,y^\circ \right\rangle - \alpha - \beta = 0.$

▲ ***Įrodymas. Būtinumas.*** Tarkime, kad $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ yra bimatricio lošimo G mišriojo plėtinio H balno taškas. Pagal 7.2 teoremą egzistuoja realieji skaičiai α ir β, su kuriais galioja sąlygos

$$Ay^\circ \le \alpha e,\ B^T x^\circ \le \beta e \text{ ir } \left\langle x^\circ,\ (A+B)\,y^\circ \right\rangle = \alpha + \beta. \tag{7.10}$$

Kadangi $x^\circ \in X$ ir $y^\circ \in Y$, tai $x^\circ \ge 0$, $y^\circ \ge 0$, $\left\langle x^\circ,\ e\right\rangle = 1$ ir $\left\langle y^\circ,\ e\right\rangle = 1$.

Matome, kad rinkinys $\left(x^\circ;\ y^\circ;\ \alpha;\ \beta\right)$ tenkina (7.9) uždavinio apribojimus. Kita vertus, šis rinkinys tenkina lygybę

$$\left\langle x,\ \left(A+B\right)y\right\rangle - \alpha - \beta = 0. \qquad (7.11)$$

Iš 7.9 uždavinio apribojimų sistemos gauname:

$$\left\langle x,\ Ay\right\rangle \le \alpha \text{ ir } \left\langle B^T x,\ y\right\rangle \le \beta,$$

kai $\left\langle x,\ e\right\rangle = 1$, $\left\langle y,\ e\right\rangle = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; taigi rinkiniai $\left(x;\ y;\ \alpha;\ \beta\right)$, kurie priklauso (7.9) uždavinio leistinajai aibei, tenkina nelygybę

$$\left\langle x,\ \left(A+B\right)y\right\rangle - \alpha - \beta \le 0.$$

Sugretinę šią nelygybę su (7.11) lygybe, darome išvadą, kad rinkinys $\left(x^\circ;\ y^\circ;\ \alpha;\ \beta\right)$ yra (7.9) uždavinio sprendinys.

Pakankamumas. Tarkime, kad $\left(x^\circ;\ y^\circ;\ \alpha;\ \beta\right)$ yra (7.9) uždavinio sprendinys, kuris tenkina sąlygą $\left\langle x^\circ,\ \left(A+B\right)y^\circ\right\rangle - \alpha - \beta = 0.$ Tada

- $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ\right\rangle + \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ\right\rangle = \alpha + \beta$;
- $\alpha \ge \left\langle x,\ Ay\right\rangle$, kai $x \in X$, $y \in Y$;
- $\beta \ge \left\langle B^T x,\ y\right\rangle$, kai $x \in X$, $y \in Y$;
- $x^\circ \in X$, $y^\circ \in Y$.

Todėl

- $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle = \alpha + \beta \ge \left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle$;

taigi $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle \ge \left\langle x,\ Ay^\circ \right\rangle$, kai $x \in X$;

- $\left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle = \alpha + \beta \ge \left\langle x^\circ,\ Ay^\circ \right\rangle + \left\langle B^T x^\circ,\ y \right\rangle$;

taigi $\left\langle B^T x^\circ,\ y^\circ \right\rangle \ge \left\langle B^T x^\circ,\ y \right\rangle$, kai $y \in Y$.

Vadinasi, strategijų pora $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ yra lošimo H pusiausvyros situacija.

Dar panagrinėkime bimatricio lošimo mišriojo plėtinio pusiausvyros situacijų aibės struktūrą.

Apibrėžkime aibes:

$$S = \left\{(x;\ \beta):\ B^T x \le \beta e,\ x \ge 0,\ \left\langle x,\ e \right\rangle = 1\right\},$$

$$T = \left\{(y;\ \alpha):\ Ay \le \alpha e,\ y \ge 0,\ \left\langle y,\ e \right\rangle = 1\right\}.$$

Tegu $\left(x^\circ; y^\circ\right)$ yra lošimo H pusiausvyros situacija. Tada rinkinį $\left(x^\circ; y^\circ; \alpha; \beta\right)$ vadinsime šio lošimo *kraštutine pusiausvyros situacija*, jeigu $\left(x^\circ;\ \beta\right)$ yra aibės S kraštutinis taškas, o $\left(y^\circ;\ \alpha\right)$ yra aibės T kraštutinis taškas. ▼

7.4 TEOREMA. Kiekviena bimatricio lošimo $G = \left\langle I,\ J,\ A,\ B \right\rangle$ mišriojo plėtinio $H = \left\langle X,\ Y,\ K_1,\ K_2 \right\rangle$ pusiausvyros situacija yra jo kraštutinių pusiausvyros situacijų iškilasis darinys.

▲ ***Įrodymas.*** Tegu $\left(\bar{x}; \bar{y}; \bar{\alpha}; \bar{\beta}\right)$ yra lošimo H pusiausvyros situacija. Tada pora $\left(\bar{x};\ \bar{\beta}\right)$ yra tiesinio programavimo uždavinio

$$\max\left\{\langle x,\ A\overline{y}\rangle+\langle x,\ B\overline{y}\rangle-\overline{\alpha}-\beta:\ (x;\beta)\in S\right\},\qquad(7.12)$$

$$S=\left\{(x;\ \beta):\ B^T x\le\beta e,\ x\ge 0,\ \langle x,\ e\rangle=1\right\},$$

sprendinys. Jis yra aibės S kraštutinių taškų iškilasis darinys (arba pats yra šios aibės kraštutinis taškas).

Analogiškai pora $(\overline{y};\ \overline{\alpha})$ yra tiesinio programavimo uždavinio

$$\max\left\{\left\langle A^T\overline{x},\ y\right\rangle+\left\langle B^T\overline{x},\ y\right\rangle-\alpha-\overline{\beta}:\ (y;\ \alpha)\in T\right\},\qquad(7.13)$$

$$T=\left\{(y;\ \alpha):\ Ay\le\alpha e,\ y\ge 0,\ \langle y,\ e\rangle=1\right\},$$

sprendinys. Jis yra aibės T kraštutinių taškų iškilasis darinys (arba pats yra šios aibės kraštutinis taškas).

Tegu $E(S)$ ir $E(T)$ yra atitinkamai aibių S ir T kraštutinių taškų aibės. Pažymėkime $U,\ U\subset E(S)$, aibę kraštutinių taškų, kurių iškilasis darinys (su teigiamais koeficientais) yra pora $(\overline{x};\overline{\beta})$; $V,\ V\subset E(T)$, aibę kraštutinių taškų, kurių iškilasis darinys (su teigiamais koeficientais) yra pora $(\overline{y};\ \overline{\alpha})$. Tada kiekvienas aibės U taškas $(x;\ \beta)$ yra (7.12) uždavinio sprendinys, t. y. $\langle x,\ A\overline{y}-\overline{\alpha}e\rangle+\left\langle\overline{y},\ B^T x-\beta e\right\rangle=0$, kai $(x;\ \beta)\in U$. Kadangi $x\ge 0$, $A\overline{y}\le\overline{\alpha}e$, $\overline{y}\ge 0$, $B^T x\le\beta e$, tai $\left\langle\overline{y},\ B^T x-\beta e\right\rangle=0$, kai $(x;\ \beta)\in U$.

Pora $(\overline{y};\ \overline{\alpha})$ yra aibės V taškų $(y;\ \alpha)$ iškilasis darinys, todėl $\overline{y}$ yra neneigiamų vektorių y iškilasis darinys ir

$$\left\langle y,\ B^T x-\beta e\right\rangle=0,\ \text{kai}\ (x;\ \beta)\in U\ \text{ir}\ (y;\ \alpha)\in V.$$

Analogiškai

$\langle x,\ Ay - \alpha e\rangle = 0$, kai $(y;\ \alpha) \in V$ ir $(x;\ \beta) \in U$.

Vadinasi,

$$\langle x,\ Ay - \alpha e\rangle + \left\langle y,\ B^T x - \beta e\right\rangle = 0,$$

kai $(x;\ \beta) \in U$ ir $(y;\ \alpha) \in V$,

arba

$$\langle x,\ (A + B)\, y\rangle - \alpha - \beta = 0, \text{ kai } (x;\ \beta) \in U \text{ ir } (y;\ \alpha) \in V.$$

Dabar jau galima padaryti išvadą, kad rinkiniai $(x;\ y;\ \alpha;\ \beta)$, $(x;\ \beta) \in U$, $(y;\ \alpha) \in V$, yra kraštutinės pusiausvyros situacijos, o $(\bar{x};\ \bar{y};\ \bar{\alpha};\ \bar{\beta})$ yra jų iškilasis darinys. ▼

■ **7.1 pavyzdys.** Išspręskime bimatricį lošimą, kai

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Šis lošimas neturi pusiausvyros situacijų, todėl toliau nagrinėsime jo mišrųjį plėtinį $H = \langle X,\ Y,\ K_1,\ K_2\rangle$; čia

$$X = \left\{\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}:\ 0 \le p \le 1\right\},\ Y = \left\{\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}:\ 0 \le q \le 1\right\},$$

$$K_1(x,\ y) = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= p(2 - 12q) + (1-p)(2q - 1) = p(3 - 14q) + 2q - 1,$$

$$K_2(x,\ y) = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= p(7q-2) + (1-p)(1-2q) = p(9q-3) + 1 - 2q.$$

Uždavinį spręsime remdamiesi 7.2 teorema. Taigi spręsime (7.7) sistemą:

$$Ay \le \alpha e\,,\ B^T x \le \beta e\,,\ \langle x,\ (A+B)\,y \rangle = \alpha + \beta\,.$$

Pagal uždavinio sąlygą turime tokią sistemą:

$$\begin{cases} 2-12q \le \alpha, \\ 2q-1 \ \ \le \alpha, \\ 6p-1 \ \ \le \beta, \\ 1-3p \ \ \le \beta, \\ -5pq \ \ = \alpha + \beta. \end{cases} \qquad (7.14)$$

Pavaizduokime grafiškai porų $(q;\ \alpha)$ ir $(p;\ \beta)$ leistinąsias aibes S^* ir T^* (žr. 7.1 pav. ir 7.2 pav.). Jos apibrėžiamos taip:

$$\alpha \ge \max(2-12q;\ 2q-1),\ 0 \le q \le 1;$$

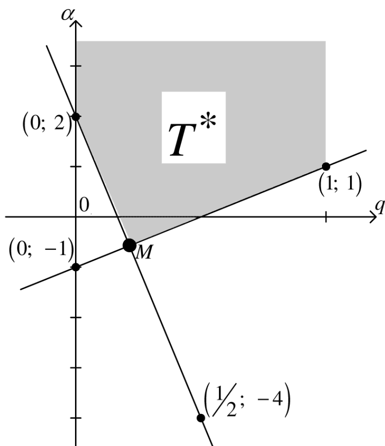
$$\beta \ge \max(6p-1;\ 1-3p),\ 0 \le p \le 1\,.$$

Taško M koordinates $\left(\frac{3}{14};\ -\frac{4}{7}\right)$ randame iš lygčių sistemos

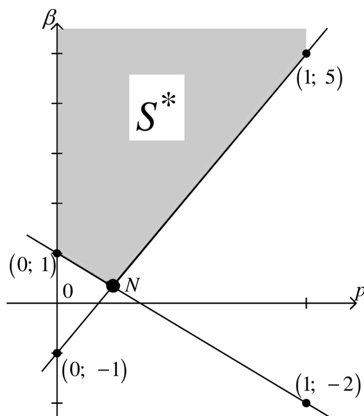
$$\begin{cases} \alpha = 2-12q, \\ \alpha = 2q-1, \end{cases}$$

o taško N koordinates $\left(\frac{2}{9};\ \frac{1}{3}\right)$ – iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} \beta = 6p-1, \\ \beta = 1-3p. \end{cases}$$



7.1 pav.



7.2 pav.

Iš pradžių patikrinkime, ar skaičių $q=\frac{3}{14}$, $p=\frac{2}{9}$, $\alpha=-\frac{4}{7}$, $\beta=\frac{1}{3}$ rinkinys tenkina (7.14) sistemos lygtį $-5pq=\alpha+\beta$. Gausime:

$$-5pq=-5\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{9}=-\frac{5}{21} \text{ ir } \alpha+\beta=-\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=-\frac{5}{21}.$$

Taigi radome vieną (7.14) sistemos sprendinį. Pagal 7.2 teoremą strategijų

$$x^\circ=\begin{pmatrix} 2/9 \\ 7/9 \end{pmatrix} \text{ ir } y^\circ=\begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix}$$

pora yra bimatricio lošimo mišriojo plėtinio pusiausvyros situacija. Lošėjų išlošių vidurkiai tokie:

$$K_1\left(x^\circ,\ y^\circ\right)=-\frac{4}{7},\ K_2\left(x^\circ,\ y^\circ\right)=\frac{1}{3}.$$

Toliau nagrinėkime (7.14) sistemą, kai $p \neq \frac{2}{9}$ ir $q \neq \frac{3}{14}$.

Pagal 7.4 teoremą pakanka patikrinti, ar (7.14) sistemą tenkina kitos aibių S^* ir T^* kraštutinių taškų poros. Aibės S^* kraštutiniai taškai yra $(0;\ 1)$, $\left(2/9;\ 1/3\right)$ ir $(1;\ 5)$, o aibės T^* kraštutiniai taškai yra $(0;\ 2)$, $\left(3/14;\ -4/7\right)$ ir $(1;\ 1)$.

Tiesiogiai tikrinant galima įsitikinti, kad rinkinys $\left(\frac{2}{9};\ \frac{3}{14};\ -\frac{4}{7};\ \frac{1}{3}\right)$ yra vienintelis, kuris tenkina (7.14) sistemą. Todėl situacija $\left(\begin{pmatrix} 2/9 \\ 7/9 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix}\right)$ yra vienintelė lošimo G mišriojo plėtinio H pusiausvyros situacija.

8. Koaliciniai lošimai

Nagrinėkime lošimus, kuriuose lošėjams leidžiama bendradarbiauti. Apsiribosime kraštutiniu atveju, kai leistinoji koalicijų aibė $\mathcal{K}$ yra $\mathcal{K} = 2^N$; čia N – lošėjų aibė (2^N – visų aibės N poaibių sistema). Todėl šiuo atveju pakanka žinoti tik lošėjų aibę N. Daugiausia nagrinėsime lošimus, kuriuose N yra baigtinė aibė ir turėsime mintyje, kad $N = \{1;\ 2;\ ...;\ n\}$. Jei $K \subset N$, tai simboliu $|K|$ žymėsime lošėjų skaičių koalicijoje K. Tam skaičiui žymėti kartais naudosime ir mažąsias raides $n = |N|$, $k = |K|$ ir pan.

Funkcija v, apibrėžta aibėje $\mathcal{K} = 2^N$, yra vadinama lošimo (charakteringąja) *charakteristine funkcija*, jeigu

$$v(K) = \max_{s_K \in S_K} \min_{s_{N \setminus K} \in S_{N \setminus K}} u(s_K,\ s_{N \setminus K}),\ K \subset N;$$

čia u yra koalicijos K naudingumo funkcija, S_K ir $S_{N \setminus K}$ – koalicijų K ir $N \setminus K$ strategijų aibės. Naudingumo funkcijos u reikšmė $u(s_K,\ s_{N \setminus K})$ yra koalicijos K išlošis, kai ji pasirenka strategiją $s_K \in S_K$, o koalicija $N \setminus K$ – strategiją $s_{N \setminus K} \in S_{N \setminus K}$. Koalicijos $N \setminus K$ išlošis tada būtų $-u(s_K,\ s_{N \setminus K})$. Taigi suprantama, kad tarp koalicijų K ir $N \setminus K$ vyksta antagonistinis lošimas.

Skaičius $v(K)$ yra garantuotas koalicijos K išlošis. Skaičius $v(K)$ dar gali būti traktuojamas kaip koalicijos $K \subset N$ *galia*.

Nagrinėdami lošimus turėsime mintyje, kad funkcija v yra žinoma, taip pat tai, kad funkcija v tenkina šias dvi sąlygas:

1) $v(\varnothing)=0$;

2) yra superadityvi funkcija, t. y. tenkina sąlygą

$v(K' \bigcup K'') \geq v(K')+v(K'')$,

kai K', $K'' \subset N$ ir $K' \bigcap K'' = \varnothing$. (8.1)

Funkcijos v superadityvumo sąlyga sietina su didesnių koalicijų susidarymo tikslingumu.

Kai funkcija v yra superadityvi funkcija, tai turėtų susidaryti „didžioji“ koalicija N, nes $v(N) \geq v(K)+v(N \setminus K)$, kai $K \subset N$.

Išeitų, kad lošėjai, sudarantys koaliciją N, turėtų pasidalyti dydį $v(N)$. Derybų rezultatas dėl „didžiosios“ koalicijos N sudarymo turėtų būti susitarimas, kaip pasidalyti bendrą išlošį $v(N)$.

8.1 APIBRĖŽIMAS. Vektorius $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ yra vadinamas *dalybų vektoriumi* (arba tiesiog dalybomis), jeigu tenkina dvi sąlygas:

1) $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$; (8.2)

ir

2) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$. (8.3)

Pirmoji apibrėžimo sąlyga (8.2) reiškia, kad kiekvienas lošėjas, sutikęs dalyvauti koalicijoje N, turi gauti ne mažiau nei galėtų išlošti vienas (atsiskyręs). Antroji sąlyga (8.3) reiškia, kad lošėjai išsidalija visą bendrą išlošį $v(N)$ (nieko nepalieka).

8.2 APIBRĖŽIMAS. Aibė

$$E(v)=\left\{x\in \mathbb{R}_n:\ \left\langle x,\ e^i\right\rangle \ge v(\{i\}),\ i\in N,\ x(N)=v(N)\right\};$$

(čia $x(N)=\langle x,\ e\rangle=\sum_{i\in N} x_i$; e^i, $i\in N$, yra koordinatiniai erdvės $\mathbb{R}_n$ vektoriai) yra vadinama *lošimo dalybų aibe*.

Ši lošimo dalybų aibė atstos lošimo baigmių aibę Σ (bendrajame modelyje). Apibūdintą lošimą žymėsime pora $G=\langle N,\ v\rangle$ (v – charakteristinė funkcija). Žinodami v, lengvai galime apibrėžti ir dalybų aibę $E(v)$. Ją galima užrašyti ir taip:

$$E(v)=\left\{\begin{matrix} x=(x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n):\ x_i\ge \\ \ge v(\{i\}),\ i=1,\ 2,\ ...,\ n,\ \sum_{i=1}^{N} x_i=v(N) \end{matrix}\right\}.$$

Preferencijos sąryšiai dalybų aibėje $E(v)$ apibrėžiami taip.

8.3 APIBRĖŽIMAS. Sakoma, kad koalicijai K ($K\subset N$) dalybos x *dominuoja* dalybų y ($x,\ y\in E(v)$) atžvilgiu (rašoma $x\underset{K}{\succ} y$), jeigu

1) $x_i > y_i$, kai $i\in K$; (8.4)

ir

2) $x(K)\le v(K)$; (8.5)

čia $x(K)=\sum_{i\in K} x_i$.

Pirmoji šio apibrėžimo sąlyga yra vadinama individo racionalumo sąlyga, o antroji – realizuojamumo. Lošimo partneriams

(sudarantiems koaliciją $N \setminus K$) nesutikus priimti dalybų x, koalicijos K dalyviai turėtų galimybę grasinti koalicijai $N \setminus K$, jog pasitrauks iš didžiosios koalicijos N, nes jos nariams galioja nelygybės (8.4) ir $y(K) < v(K)$. Šiuo atveju lošėjams $i \in K$ būtų naudingiau pasidalyti išlošį $v(K)$.

8.4 APIBRĖŽIMAS. Sakoma, kad dalybos x dominuoja dalybų y (x, $y \in E(v)$) atžvilgiu, jeigu yra bent viena koalicija K, $K \subset N$, kuriai dalybos x dominuoja dalybų y atžvilgiu, t. y. $x \underset{K}{\succ} y$.

Šis dominavimo sąryšis žymimas simboliu „$\succ$“; taigi rašoma $x \succ y$.

Dominavimo sąryšis yra nepriekaištingas tam tikru teisingumo aspektu, bet gali būti netgi prieštaringas loginiu požiūriu. Galimi atvejai $x \succ y$ ir $y \succ x$ bei $x \not\succ y$ ir $y \not\succ x$.

Priklausomai nuo charakteristinės funkcijos v savybių koaliciniai lošimai yra grupuojami į tam tikras klases (aibes).

8.5 APIBRĖŽIMAS. Koalicinis lošimas $G = \langle N,\ v \rangle$ yra vadinamas

- *pastovios sumos lošimu*, jeigu
  $v(K) + v(N \setminus K) = v(N)$, kai $K \subset N$;
- *esminiu lošimu*, jeigu
  $$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\});$$
- *normuotu lošimu*, jeigu
  $$v(K) = \begin{cases} 0, \text{ kai } K = \{i\},\ i \in N; \\ 1, \text{ kai } K = N; \end{cases}$$

- *simetriniu lošimu*, jeigu
  $v(K') = v(K'')$, K', $K'' \subset N$, kai $|K'| = |K''|$;
- *paprastuoju lošimu*, jeigu
  $v(K) \in \{0;\ 1\}$, $K \subset N$.

Lyginant lošimus labai praverčia strateginio ekvivalentumo sąvoka.

8.6 APIBRĖŽIMAS. Koaliciniai lošimai $G' = \langle N,\ v' \rangle$ ir $G'' = \langle N,\ v'' \rangle$ yra vadinami *strategiškai ekvivalenčiais*, jeigu yra tokie realieji skaičiai r ($r > 0$) ir α_i, $i \in N$, su kuriais galioja sąlyga:

$$v''(K) = rv'(K) + \sum_{i \in K} \alpha_i, \quad K \subset N. \tag{8.6}$$

Aišku, kad šioje sąlygoje $v'(K)$ ir $v''(K)$ galima sukeisti vietomis, nes iš jos gauname sąlygą:

$$v'(K) = \frac{1}{r} v''(K) + \sum_{i \in K} (-\alpha_i), \ K \subset N;$$

tereikia pažymėti $r' = \dfrac{1}{r}$ ($r' > 0$, nes $r > 0$), $\alpha_i' = -\alpha_i$, $i \in N$.

Tarp strategiškai ekvivalenčių lošimų G' ir G'' dalybų aibių $E(v')$ ir $E(v'')$ egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. Tokią atitiktį (pažymėkime ją φ) galima apibrėžti formule

$$\varphi(x) = rx + \alpha, \ \alpha = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n), \ x \in E(v').$$

Kiekvienas vektorius $\varphi(x)$, $x \in E(v')$, yra lošimo $G'' = \langle N,\ v'' \rangle$ dalybų aibės $E(v'')$ elementas, nes

- $\varphi_i(x) = rx_i + \alpha_i \geq rv'(\{i\}) + \alpha_i = v''(\{i\})$, kai $i \in N$;
- $\sum_{i \in N} \varphi_i(x) = \sum_{i \in N}(rx_i + \alpha_i) = r\sum_{i \in N} x_i + \sum_{i \in N} \alpha_i =$

$$= rv'(N) + \sum_{i \in N} \alpha_i = v''(N).$$

Nesunku įsitikinti, kad atvaizdis φ turi ir tokią savybę:

$$\varphi(x) \underset{K}{\succ''} \varphi(y) \Leftrightarrow x \underset{K}{\succ'} y;$$

čia $x,\ y \in E(v')$, $K \subset N$.

8.1 TEOREMA. Bet kuris esminis lošimas $G = \langle N,\ v\rangle$ yra strategiškai ekvivalentus vienam ir tik vienam normuotam lošimui.

▲ ***Įrodymas.*** Tegu $G = \langle N,\ v\rangle$ yra esminis lošimas, o $G' = \langle N,\ v'\rangle$ – normuotas lošimas. Kad G' būtų strategiškai ekvivalentus lošimui G, turi egzistuoti skaičiai r ($r > 0$) ir α_i, $i \in N$, su kuriais

$$v(K) = rv'(K) + \sum_{i \in K} \alpha_i,\quad K \subset N. \tag{8.7}$$

Iš šios sąlygos gauname:

- $\alpha_i = v(\{i\})$, $i \in N$, nes $v'\{i\} = 0$, kai $i \in N$;
- $r = v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})$, nes $v'(N) = 1$.

Lošimas G esminis, todėl $r > 0$.

Iš (8.7) sąlygų galima apskaičiuoti lošimo $G' = \langle N,\ v'\rangle$ charakteristinės funkcijos reikšmes:

$$v'(K) = \frac{v(K) - \sum_{i \in K} \alpha_i}{r} = \frac{v(K) - \sum_{i \in K} v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})}, \; K \subset N .$$

Lošimo $G' = \langle N, \; v' \rangle$ vienatis yra akivaizdi. ▼

9. Koalicinio lošimo šerdis ir stabiliosios aibės

Susipažinsime su dviem svarbiausiais klasikiniais koalicinių lošimų optimalumo principais. Šie principai (lošimo šerdis ir stabiliosios aibės) yra pasiūlyti lošimų teorijos pradininkų O. Morgenšterno ir Dž. fon Noimano.

9.1 apibrėžimas. Tegu $G=\langle N, v\rangle$ yra koalicinis lošimas, o $E(v)$ – šio lošimo dalybų aibė. Lošimo G *šerdimi* (žym. $C(v)$) yra vadinama nedominuojamų dalybų aibė. Šią aibę galima užrašyti šitaip:

$$C(v)=\{x\in E(v):\ y\not\succ x,\ y\in E(v)\}.$$

9.2 APIBRĖŽIMAS. Aibė $S(v)$, $S(v)\subset E(v)$, yra vadinama koalicinio lošimo $G=\langle N, v\rangle$ *stabiliąja aibe*, jeigu jos elementai tenkina šias sąlygas:

1) $x,\ y\in S(v)\Rightarrow y\not\succ x$;

ir

2) $z\in E(v)\setminus S(v)\Rightarrow[\exists x\in S(v)]\, x\succ z$.

Pirmoji šio apibrėžimo sąlyga yra vadinama aibės $S(v)$ *vidinio stabilumo*, o antroji – *išorinio stabilumo* sąlyga. Tokie pavadinimai tinka todėl, kad pirmoji sąlyga reiškia, jog preferencijos sąryšio ($\succsim$) atžvilgiu visos aibei $S(v)$ priklausančios dalybos yra lygiavertės. Antroji sąlyga rodo, kad nė vienu dalybų vektoriumi $z\in E(v)\setminus S(v)$ negalima papildyti aibės $S(v)$ nepažeidus vidinio stabilumo.

9.1 TEOREMA. Tarkime, kad koalicinio lošimo $G = \langle N, v \rangle$ charakteristinė funkcija v yra superadityvi. Dalybos $x \in E(v)$ priklauso lošimo G šerdžiai $C(v)$ tada ir tik tada, kai tenkina šią sąlygų sistemą:

$$\begin{cases} x(K) \geq v(K), \ K \subset N; & (9.1) \\ x(N) = v(N); & (9.2) \end{cases}$$

čia $x(K) = \sum\limits_{i \in K} x_i, \ \ K \subset N.$

▲ ***Įrodymas. Pakankamumas.*** Tegu $x \in E(v)$ ir tenkina (9.1), (9.2) sąlygas. Prieštaraudami teoremai tarkime, kad $x \notin C(v)$. Pagal šerdies apibrėžimą tai reikštų, kad yra dalybos $y \in E(v)$, kurios dominuoja dalybų x atžvilgiu: $y \succ x$. Pagal dominavimo apibrėžimą yra koalicija $K \subset N$: $y \underset{K}{\succ} x$; todėl (pagal dominavimo sąryšio $\underset{K}{\succ}$ apibrėžimą) $y_i > x_i$, kai $i \in K$, ir $y(K) \leq v(K)$. Bet tada gauname, jog $v(K) \geq y(K) > x(K) \geq v(K)$; taigi $v(K) > v(K)$. Kadangi taip būti negali, tai turime atmesti prielaidą, kad $x \notin C(v)$, ir pripažinti, kad dalybų vektorius x, kuris tenkina (9.1) ir (9.2) sąlygas, būtinai priklauso šerdžiai.

Būtinumas. Tarkime, kad lošimo šerdis $C(v)$ yra netuščia, bet yra tokios jai priklausančios dalybos $x \in C(v)$, kurios netenkina bent vienos iš (9.1) ir (9.2) sąlygų. Kadangi $C(v) \subset E(v)$, tai $x(N) = v(N)$ ir $x_i \geq v(\{i\})$, kai $i \in N$. Vadinasi, turi egzistuoti koalicija

$K \subset N$ ($K \neq \{i\}$ ir $K \neq N$),

kuri tenkina nelygybę $x(K) < v(K)$. (9.3)

Apibrėžkime vektorių $y \in \mathbb{R}_n$:

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{\varepsilon}{|K|}, \ \varepsilon = v(K) - x(K), \ i \in K; \\ v(\{i\}) + \dfrac{\alpha}{|N \setminus K|}, \\ \alpha = v(N) - v(K) - \sum\limits_{i \in N \setminus K} v(\{i\}), \ i \in N \setminus K. \end{cases} \quad (9.4)$$

Kadangi v yra superadityvi funkcija, tai $\alpha \geq 0$. Aišku, kad $\varepsilon > 0$, nes pagal prielaidą galioja (9.3) nelygybė. Iš pradžių įsitikinkime, kad (9.4) formulėmis apibūdintas vektorius y priklauso dalybų aibei:

1) $i \in K \Rightarrow y_i > x_i \geq v(\{i\})$, nes $x \in E(v)$;

2) $i \in N \setminus K \Rightarrow y_i \geq v(\{i\})$, nes $\alpha \geq 0$. (9.5)

Taigi $y_i \geq v(\{i\})$, kai $i \in N$. Sudėkime vektoriaus y komponentes ir gausime:

$$y(N) = \sum_{i \in K} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{|K|} \right) + \sum_{i \in N \setminus K} \left(v(\{i\}) + \frac{\alpha}{|N \setminus K|} \right) =$$

$$= x(K) + \varepsilon + \sum_{i \in N \setminus K} v(\{i\}) + \alpha =$$

$$= x(K) + v(K) - x(K) + \sum_{i \in N \setminus K} v(\{i\}) +$$

$$+ v(N) - v(K) - \sum_{i \in N \setminus K} v(\{i\}) = v(N).$$

Iš šios ir (9.5) sąlygos darome išvadą, kad $y \in E(v)$.

Įrodysime, kad $y \underset{K}{\succ} x$. Iš (9.4) matome, kad $y_i > x_i$, kai $i \in K$ (nes $\varepsilon > 0$). Belieka įsitikinti, kad $y(K) \le v(K)$. Skaičiuodami gauname:

$$y(K) = \sum_{i \in K} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{|K|} \right) = x(K) + \varepsilon =$$
$$= x(K) + v(K) - x(K) = v(K).$$

Taigi $y \underset{K}{\succ} x$, todėl $y \succ x$. Ši išvada prieštarauja šerdies apibrėžimui (pasirinkome $x \in C(v)$). Vadinasi, prielaidą, jog egzistuoja $K \subset N$, kuriai $x(K) < v(K)$, reikia atmesti. Tai reiškia, kad visos (9.1) ir (9.2) sąlygos galioja, kai $x \in C(v)$. ▼

9.2 TEOREMA. Jeigu $G = \langle N, v \rangle$ yra esminis pastovios sumos lošimas, tai jo šerdis yra tuščia aibė.

▲ ***Įrodymas.*** Prieštaraudami teoremai tarkime, kad $C(v) \neq \varnothing$. Pasirinkime bet kurias šerdžiai priklausančias dalybas $x \in C(v)$. Pagal (9.1) teoremą $x(N \setminus \{i\}) \ge v(N \setminus \{i\})$, kai $i \in N$. Sudėję visas nelygybes, gausime:

$$\sum_{i \in N} x(N \setminus \{i\}) \ge \sum_{i \in N} v(N \setminus \{i\}). \tag{9.6}$$

Kadangi lošimo suma yra pastovi, tai

$$v(N \setminus \{i\}) = v(N) - v(\{i\});$$

todėl

$$\sum_{i \in N} v\left(N \setminus \{i\}\right) = n \cdot v(N) - \sum_{i \in N} v\left(\{i\}\right) =$$

$$= (n-1) \cdot v(N) + \left(v(N) - \sum_{i \in N} v\left(\{i\}\right) \right) >$$

G – esminis lošimas

$$> (n-1) \cdot v(N).$$

Kairiąją (9.6) nelygybės pusę pertvarkykime taip:

$$\sum_{i \in N} x\left(N \setminus \{i\}\right) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = (n-1) \sum_{i \in N} x_i = (n-1) v(N).$$

Skaičiavimo rezultatus įrašę į (9.6), gausime

$$(n-1) v(N) > (n-1) v(N),$$

taigi neįmanomą nelygybę $v(N) > v(N)$.

Darome išvadą, jog prielaida $C(v) \neq \varnothing$ yra nekorektiška. Vadinasi, teoremos teiginys yra teisingas.

Nagrinėdami konkrečius pavyzdžius galėtume įsitikinti, kad tuščią šerdį gali turėti ne tik esminiai lošimai, kurių suma yra pastovi. ▼

■ **9.1 pavyzdys.** Tegu *G* yra 4 asmenų koalicinis lošimas, kurio charakteristinė funkcija yra tokia:

$$v\left(\{i\}\right) = 0,\ i = 1, 2, 3, 4;\ v\left(\{i, j\}\right) = \frac{1}{2},\ i, j \in \{1; 2; 3; 4\},\ i \neq j;$$

$$v\left(\{1;\ 2;\ 3\}\right) = v\left(\{1;\ 2;\ 4\}\right) = \frac{3}{4},$$

$$v\left(\{1;\ 3;\ 4\}\right) = v\left(\{2;\ 3;\ 4\}\right) = 1;$$

$$v\left(\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}\right) = 1.$$

Šis lošimas yra esminis. Jo charakteristinė funkcija yra superadityvi. Lošimo suma nėra pastovi. Raskime šio lošimo šerdį $C(v)$.

Taikykime 9.1 teoremą. Pagal ją šerdį apibrėžia tokia nelygybių ir vienos lygties sistema:

$$\begin{cases}
x_1 \geq 0, & (1)\\
x_2 \geq 0, & (2)\\
x_3 \geq 0, & (3)\\
x_4 \geq 0, & (4)\\
x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}, & (5)\\
x_1 + x_3 \geq \frac{1}{2}, & (6)\\
x_1 + x_4 \geq \frac{1}{2}, & (7)\\
x_2 + x_3 \geq \frac{1}{2}, & (8)\\
x_2 + x_4 \geq \frac{1}{2}, & (9)\\
x_3 + x_4 \geq \frac{1}{2}, & (10)\\
x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{4}, & (11)\\
x_1 + x_2 + x_4 \geq \frac{3}{4}, & (12)\\
x_1 + x_3 + x_4 \geq 1, & (13)\\
x_2 + x_3 + x_4 \geq 1, & (14)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. & (15)
\end{cases}$$

Iš (15) lygybės atimkime (14) nelygybę. Gausime:

$x_1 \le 0$.

Sugretinę šią nelygybę su (1), gauname $x_1 = 0$.
Analogiškai iš (15), (13) ir (2) gauname $x_2 = 0$. Iš (15), (12), (3) gauname $0 \le x_3 \le \frac{1}{4}$.

Taigi $x_1 + x_2 = 0$, nors pagal (5) turėtų būti $x_1 + x_2 \ge \frac{1}{2}$; vadinasi, sistema (1)–(15) sprendinių neturi.

Tai reiškia, kad (pagal (9.2) teoremą) $C(v) = \varnothing$.

Panagrinėkime ryšį tarp lošimo šerdies ir stabiliųjų aibių.

9.3 TEOREMA. Jeigu lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ šerdis $C(v)$ yra netuščia aibė, tai ji yra kiekvienos šio lošimo stabiliosios aibės $S(v)$ poaibis (kai lošimas turi bent vieną stabiliąją aibę).

▲ ***Įrodymas.*** Tegu $C(v) \ne \varnothing$, bet yra stabilioji aibė $S(v)$ tokia, kad $C(v) \not\subset S(v)$. Tai reiškia, kad $C(v) \setminus S(v) \ne \varnothing$. Pasirinkime $x \in C(v) \setminus S(v)$. Pagal stabiliosios aibės apibrėžimą (išorinio stabilumo sąlygą) yra dalybos $z \in S(v)$, dominuojančios dalybų x atžvilgiu: $z \succ x$. Bet tai prieštarauja šerdies apibrėžimui (šerdis yra nedominuojamų dalybų aibė). Vadinasi, $C(v) \setminus S(v) = \varnothing$, kai $C(v) \subset E(v)$ yra lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ stabilioji aibė. ▼

Išvada. Jei $C(v)$ yra lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ stabilioji aibė, tai ji yra vienintelė šio lošimo stabilioji aibė.

Nagrinėjant konkrečius lošimus galima įsitikinti, kad stabiliųjų aibių struktūra yra gana sudėtinga.

■ **9.2 pavyzdys.** Nagrinėkime trijų asmenų redukuotą lošimą, kurio suma yra pastovi. Šio lošimo šerdis $C(v)$ yra tuščioji aibė. Tačiau stabiliųjų aibių šis lošimas turi be galo daug:

- $S_{\circ}(v)=\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right);\ \left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right);\ \left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$;
- $S_{1\alpha}(v)=\left\{(\alpha;\ \beta;\ 1-\alpha-\beta):0\le\beta\le 1-\alpha\right\},\ \alpha\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$;
- $S_{2\alpha}(v)=\left\{(\beta;\ \alpha;\ 1-\alpha-\beta):0\le\beta\le 1-\alpha\right\},\ \alpha\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$;
- $S_{3\alpha}(v)=\left\{(\beta;\ 1-\alpha-\beta;\ \alpha):0\le\beta\le 1-\alpha\right\},\ \alpha\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Tiriant šių aibių vidinį stabilumą reikia atkreipti dėmesį į tai, kad dominavimas

$$x\underset{K}{\succ}y,\ x,\ y\in E(v)=\left\{\begin{matrix}x=(x_1;\ x_2;\ x_3):\ x_i\ge 0,\\ i=1,\ 2,\ 3,\ x_1+x_2+x_3=1\end{matrix}\right\},$$

neįmanomas (tai išplaukia iš dominavimo apibrėžimo), kai $K=\{i\}$, $i\in N$, ir kai $K=N$. Vadinasi, šiame pavyzdyje reikia nagrinėti tik dominavimą dviejų lošėjų koalicijų atžvilgiu: $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$. Visų aibių, $S_{\circ}(v)$, $S_{1\alpha}(v)$, $S_{2\alpha}(v)$ ir $S_{3\alpha}(v)$, $\alpha\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$, dalybų vektorių $x=(x_1;\ x_2;\ x_3)$ ir $y=(y_1;\ y_2;\ y_3)$ pora turi bendrą savybę: dvi komponentės, sakykime, x_i ir y_i, yra lygios, o kitų dviejų skirtumai x_j-y_j ir x_k-y_k (čia $i,\ j,\ k\in\{1;\ 2;\ 3\}$ yra skirtingi indeksai) yra priešingų ženklų. Todėl negali būti nei $x\underset{K}{\succ}y$, nei $y\underset{K}{\succ}x$, kai $K\in\{\{1;\ 2\};\ \{1;\ 3\};\ \{2;\ 3\}\}$.

Visos aibės tenkina ir išorinio stabilumo sąlygą. Pateiksime tik aibės $S_{1\alpha}(v)$, $\alpha \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right)$, išorinio stabilumo įrodymą. Pagal apibrėžimą

$$S_{1\alpha}(v) = \{(\alpha;\ \beta;\ 1-\alpha-\beta) : 0 \le \beta \le 1-\alpha\}.$$

Pasirinkime $z = (z_1;\ z_2;\ z_3) \in E(v) \setminus S_{1\alpha}(v)$. Aišku, kad arba $z_1 < \alpha$, arba $z_1 > \alpha$. Pirmasis atvejis, žinoma, yra įmanomas, kai $\alpha > 0$.

Tegu $z_1 < \alpha$ ($\alpha > 0$). Tada arba $z_2 \le \frac{1}{2}$, arba $z_3 \le \frac{1}{2}$. Tarkime, kad $z_2 \le \frac{1}{2}$. Pasirinkime $x = (\alpha;\ 1-\alpha;\ 0)$. Matome, kad $x_1 = \alpha > z_1$, $x_2 = 1-\alpha > \frac{1}{2} \ge z_2$; be to, $x_1 + x_2 = v(\{1;\ 2\})$. Taigi $x \underset{\{1;\ 2\}}{\succ} z$; todėl $x \succ z$.

Tarę, kad $z_1 > \alpha$, pasirinkime dalybas

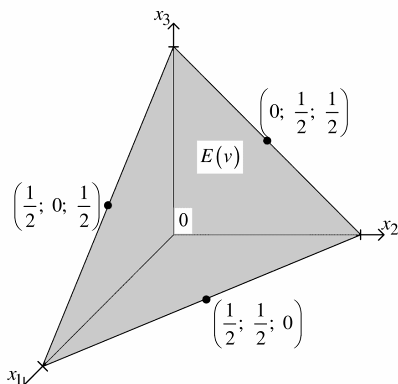
$$x = \left(\alpha;\ z_2 + \frac{\varepsilon}{2};\ z_3 + \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \varepsilon = z_1 - \alpha > 0,$$

priklausančias aibei $S_{1\alpha}(v)$. Šiuo atveju $x \underset{\{2;\ 3\}}{\succ} z$; todėl $x \succ z$.

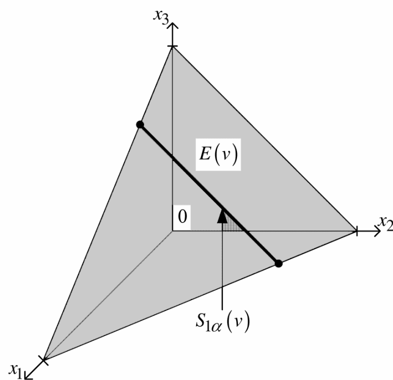
Analogiškai galima įrodyti ir visų kitų aibių išorinį stabilumą.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad aibės $S_{1\alpha}(v)$, $S_{2\alpha}(v)$ ir $S_{3\alpha}(v)$ diskriminuoja vieną lošėją. Jam yra „paskiriamas“ dydis α, o lošimas vyksta tarp kitų dviejų.

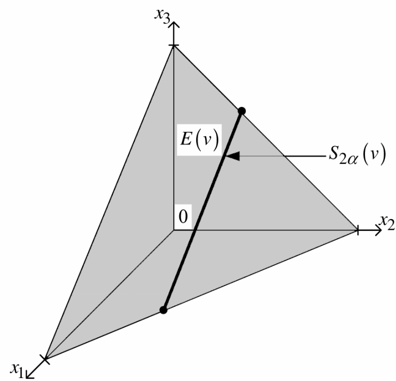
Šiame pavyzdyje nagrinėjamas aibes galima pavaizduoti grafiškai (žr. 9.1 pav., 9.2 pav., 9.3 pav. ir 9.4 pav.).



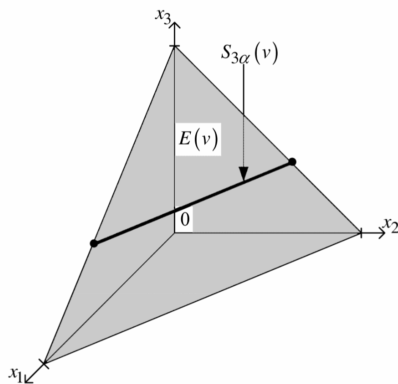
9.1 pav.



9.2 pav.



9.3 pav.



9.4 pav.

10. Koalicinio lošimo Šiaplio vertė

10.1 APIBRĖŽIMAS. Koalicija T, $T \subset N$, yra vadinama *esmine* lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ *koalicija*, jeigu

$$v(K) = v(K \cap T),\ \text{kai}\ K \subset N.$$

Iš apibrėžimo išplaukia tokios esminės koalicijos savybės:

1. aibė N yra esminė lošimo G koalicija;
2. jeigu T, $T \subset N$, yra esminė lošimo G koalicija, tai T', $T' \supset T$ ($T' \subset N$), taip pat yra esminė šio lošimo koalicija.

10.2 APIBRĖŽIMAS. Jei π yra aibės N perstata, tai $\pi G = \langle \pi N,\ \pi v \rangle$ yra lošimas, gautas iš $G = \langle N,\ v \rangle$ visose jo komponentėse lošėjus $i \in N$ pakeitus lošėjais πi.

10.3 APIBRĖŽIMAS. Lošimų $G' = \langle N,\ v' \rangle$ ir $G'' = \langle N,\ v'' \rangle$ suma (žym. $G' + G'' = \langle N,\ v' + v'' \rangle$) yra lošimas $G = \langle N,\ v \rangle$, kurio charakteristinės funkcijos v reikšmės yra skaičiuojamos pagal formulę

$$v(K) = v'(K) + v''(K),\ K \subset N.$$

10.4 APIBRĖŽIMAS. Vektorius

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v);\ \varphi_2(v);\ \ldots;\ \varphi_n(v))$$

vadinamas lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ Šiaplio (Lloyd Shapley) verte, jeigu galioja šios aksiomos:

S1. Jei T, $T \subset N$, yra esminė lošimo G koalicija, tai $\sum_{i \in T} \varphi_i(v) = v(T)$;

S2. Jei π yra bet kuri aibės N perstata, tai $\varphi_{\pi i}(\pi v) = \varphi_i(v)$, $i \in N$;

S3. Jei $G=\langle N,\ v'+v''\rangle$ yra lošimų $G'=\langle N,\ v'\rangle$ ir $G''=\langle N,\ v''\rangle$ suma, tai $\varphi(v'+v'')=\varphi(v')+\varphi(v'')$.

10.1 TEOREMA. Bet kuris koalicinis lošimas $G=\langle N,\ v\rangle$ turi Šiaplio vertę $\varphi(v)$. Be to,

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\gamma_i(T)\cdot\big(v(T)-v(T\setminus\{i\})\big), \tag{10.1}$$

$$\gamma_i(T)=\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!},\ i\in N.$$

Iš pradžių išnagrinėkime *paprasčiausio lošimo* $G_S=\langle S,\ w_S\rangle$, $S\subset N$,

$$w_S(T)=\begin{cases}1, & T\supset S;\\ 0, & T\not\supset S,\end{cases} \tag{10.2}$$

(čia $T\subset N$) Šiaplio vertės egzistavimą ir skaičiavimo formulę.

10.1 lema. Jei $G_S=\langle S,\ w_S\rangle$, $S\subset N$, yra paprasčiausias lošimas, tai jis turi vienintelę Šiaplio vertę, kuri skaičiuojama pagal šią formulę:

$$\varphi_i(w_S)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}, & \text{kai } i\in S;\\ 0, & \text{kai } i\in N\setminus S.\end{cases} \tag{10.3}$$

▲ ***Lemos įrodymas.*** Aišku, kad S yra esminė lošimo G_S koalicija. Todėl pagal S1 aksiomą

$$\sum_{i\in S}\varphi_i(w_S)=w_S(S)=1 \tag{10.4}$$

ir

$$\sum_{i\in S\cup\{j\}}\varphi_i(w_S)=w_S(S\cup\{j\})=1,\ \text{kai } j\in N\setminus S.$$

Iš čia

$$\varphi_j(w_S)=0,\ \text{kai}\quad j\in N\setminus S. \tag{10.5}$$

Jei π yra aibės N perstata, tenkinanti sąlygą $\pi S=S$, tai (pagal 10.2) $\pi w_S=w_S$. Todėl

$$\varphi_{\pi i}(\pi w_S)=\varphi_{\pi i}(w_S).$$

Pagal S2 aksiomą $\varphi_{\pi i}(\pi w_S)=\varphi_i(w_S)$, $i\in N$, todėl

$$\varphi_{\pi i}(w_S)=\varphi_i(w_S),\ \text{kai}\ i\in S.$$

Iš čia darome išvadą, jog bet kuriai lošėjų porai i ir πi (i, $\pi i\in S$) Šiaplio vertės sutampa. Vadinasi,

$$\varphi_i(w_S)=\alpha,\ \text{kai}\ i\in S; \tag{10.6}$$

čia α – const.

Raskime α. Iš (10.4) ir (10.6) gauname:

$$\sum_{i\in S}\varphi_i(w_S)=s\alpha=1;$$

todėl $\alpha=\dfrac{1}{s}$,

ir $\varphi_i(w_S)=\dfrac{1}{s}$, kai $i\in S$.

Iš čia ir (10.5) gauname (10.3). Formulės vienatis akivaizdi. ▼

10.1 lemos išvada. Jei $c>0$, tai

$$\varphi_i(cw_S)=\begin{cases}\dfrac{c}{s},\ \text{kai}\ i\in S;\\ 0,\ \text{kai}\ i\in N\setminus S.\end{cases} \tag{10.7}$$

10.2 lema. Bet kurį lošimą $G = \langle N, v \rangle$ galima vieninteliu būdu išreikšti paprasčiausių lošimų $G_S = \langle S, w_S \rangle$, $S \subset N$, tiesiniu dariniu, t. y. egzistuoja vienintelis realiųjų skaičių rinkinys c_S, $S \subset N$, su kuriuo

$$v(T) = \sum_{S \subset N} c_S w_S(T), \; T \subset N. \tag{10.8}$$

▲ ***Lemos įrodymas.*** Pasirinkime realiųjų skaičių rinkinį c_S, $S \subset N$:

$$c_S = \sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R) \tag{10.9}$$

ir nagrinėkime tiesinį darinį $\sum_{S \subset N} c_S w_S(T)$, kai T – bet kuris aibės *N* poaibis. Gausime

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(T) = \sum_{S \subset N} \left(\sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R) \right) w_S(T) =$$

$w_S(T) = 0$, kai $S \not\subset T$

$$= \sum_{S \subset T} \sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R) =$$

$$= \sum_{R \subset T} \left(\sum_{\substack{S \subset T \\ S \supset R}} (-1)^{s-r} \right) v(R). \tag{10.10}$$

pakeitus sumavimo tvarką

Apskaičiuokime reiškinį skliaustuose:

derinių skaičius

$$\sum_{\substack{S\subset T\\ S\supset R}} (-1)^{s-r} = \sum_{s=r}^{t} (-1)^{s-r} \binom{s-r}{t-r} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ kai } r = t; \\ (1-1)^{t-r}, \text{ kai } r < t; \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ kai } r = t; \\ 0, \text{ kai } r < t. \end{cases}$$

Pagal Niutono binomo formulę

$$(a+b)^{t-r} = \sum_{k=0}^{t-r} \binom{k}{t-r} a^{(t-r)-k} \cdot b^k;$$

kai $k = s - r$, $a = 1$, $b = -1$, gauname

$$(1-1)^{t-r} = \sum_{s-r=0}^{t-r} \binom{s-r}{t-r} 1^{t-s} \cdot (-1)^{s-r} =$$

$$= \sum_{s=r}^{t} (-1)^{s-r} \binom{s-r}{t-r}.$$

Įrašę į (10.10), gauname

$$\sum_{S\subset N} c_S w_S(T) = v(T) + \sum_{\substack{R\subset T\\ R\neq T}} \left(\sum_{\substack{S\subset T\\ S\supset R}} (-1)^{s-r} \right) v(R) = v(T).$$

$= 0$

Išraiškos (10.8) vienatį galima įrodyti priešingosios prielaidos būdu taikant matematinės indukcijos (pagal lošėjų skaičių koalicijoje S) metodą.

Sakykime, jog yra kitas realiųjų skaičių rinkinys c'_S, $S \subset N$, su kuriuo

$$v(T) = \sum_{S \subset N} c'_S w_S(T),\ T \subset N. \tag{10.11}$$

Kai $T = \{i\}$, $i \in N$, pagal (10.8) gauname:

$$v(\{i\}) = \sum_{S \subset N} c_S w_S(\{i\}) = c_{\{i\}} = c_i,$$

o pagal (10.11) gauname $v(\{i\}) = c'_{\{i\}} = c'_i$.

Taigi $c'_{\{i\}} = c_{\{i\}}$, kai $i \in N$, t. y. $c'_S = c_S$, kai $|S| = 1$.

Tegu $c'_S = c_S$, kai $S \subset R$, $S \neq R$. Įrodysime, kad $c'_R = c_R$. Skaičiuodami $v(R)$ gausime:

$$v(R) = \sum_{S \subset N} c_S w_S(R) = \sum_{S \subset R} c_S w_S(R) =$$
$$= \sum_{\substack{S \subset R \\ S \neq R}} c_S w_S(R) + c_R w_R(R) = \sum_{\substack{S \subset R \\ S \neq R}} c_S w_S(R) + c_R.$$

Pagal (10.11) prielaidą, turėdami mintyje, kad $c'_S = c_S$, kai $S \subset R$, $S \neq R$, gauname:

$$v(R) = \sum_{S \subset N} c'_S w_S(R) = \sum_{S \subset R} c'_S w_S(R) =$$
$$= \sum_{\substack{S \subset R \\ S \neq R}} c'_S w_S(R) + c'_R = \sum_{\substack{S \subset R \\ S \neq R}} c_S w_S(R) + c'_R.$$

Sugretinę abi $v(R)$ išraiškas, darome išvadą, kad $c'_R = c_R$.

Pagal matematinės indukcijos principą $c'_S = c_S$, kai $S \subset N$.

▲ ***10.1 teoremos įrodymas.*** Lošimų $G' = \langle N,\ v' \rangle$ ir $G'' = \langle N,\ v'' \rangle$ skirtumo $G = G' - G'' = \langle N,\ v' - v'' \rangle$ Šiaplio vertė yra

$$\varphi(v' - v'') = \varphi(v') - \varphi(v''), \tag{10.12}$$

nes $v' = (v' - v'') + v''$ ir (pagal S3) $\varphi(v') = \varphi(v' - v'') + \varphi(v'')$.
Pagal 10.2 lemą

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S ,$$

o pagal S3 ir (10.12) bei 10.1 lemos išvadą

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N} \varphi_i(c_S w_S) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{c_S}{s} .$$

Kadangi $c_S = \sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R)$, tai

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \sum_{R \subset S} (-1)^{s-r} v(R).$$

Pakeitę sumavimo tvarką, gauname

$$\varphi_i(v) = \sum_{R \subset N} \left(\sum_{\substack{S \subset N \\ S \supset R \cup \{i\}}} (-1)^{s-r} \cdot \frac{1}{s} \right) v(R) = \sum_{R \subset N} \gamma_i(R) v(R);$$

čia $\gamma_i(R) = \sum_{\substack{S \subset N \\ S \supset R \cup \{i\}}} (-1)^{s-r} \cdot \frac{1}{s}$.

Patyrinėkime $\gamma_i(R),\ i\in N$. Jei R yra toks aibės N poaibis, kad $i\in R$, tai

$$\gamma_i(R)=\sum_{\substack{S\subset N\\ S\supset R\cup\{i\}}}(-1)^{s-r}\cdot\frac{1}{s}=$$

$$=-\sum_{\substack{S\subset N\\ S\supset(R\setminus\{i\})\cup\{i\}}}(-1)^{s-(r-1)}\cdot\frac{1}{s}=-\gamma_i(R\setminus\{i\}).$$

Vadinasi,

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)v(R)+\sum_{\substack{R\subset N\\ i\notin R}}\gamma_i(R)v(R)=$$

$$=\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)v(R)+\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R\setminus\{i\})v(R\setminus\{i\})=$$

$$=\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)v(R)-\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)v(R\setminus\{i\})=$$

$$=\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)\big(v(R)-v(R\setminus\{i\})\big).$$

Taigi

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}}\gamma_i(R)\big(v(R)-v(R\setminus\{i\})\big),\ i\in N. \qquad (10.13)$$

Apskaičiuokime $\gamma_i(R),\ i\in R.$ Šis skaičius priklauso nuo koalicijų S dydžio, o ne nuo jų pačių, todėl

$$\gamma_i(R) = \sum_{\substack{S\subset N \\ S\supset R\cup\{i\}}} (-1)^{s-r}\cdot\frac{1}{s} = \sum_{\substack{S\subset N \\ S\supset R}} (-1)^{s-r}\cdot\frac{1}{s} =$$

$$= \sum_{s=r}^{n}\binom{s-r}{n-r}\frac{(-1)^{s-r}}{s} = \sum_{s=r}^{n}\binom{s-r}{n-r}(-1)^{s-r}\cdot\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{d}x =$$

$s \geq 1$

$$= \int_0^1 \sum_{s=r}^{n}\binom{s-r}{n-r}(-1)^{s-r}x^{s-1}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^{r-1}\cdot\left(\sum_{s=r}^{n}(-1)^{s-r}\binom{s-r}{n-r}x^{s-r}\right)\mathrm{d}x =$$

Niutono binomas $(1-x)^{n-r}$

$$= \int_0^1 x^{r-1}\cdot(1-x)^{n-r}\,\mathrm{d}x = I(n,\ r-1) = \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}.$$

Integralą $I(n,\ r-1)$ galima skaičiuoti dalimis:

$$I(n,\ r-1) = \int_0^1 x^{r-1}\cdot(1-x)^{n-r}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^{n-r}\cdot x^{r-1}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{n-r}\,\mathrm{d}\left(\frac{x^r}{r}\right) =$$

$$= (1-x)^{n-r}\cdot\frac{x^r}{r}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^r}{r}\mathrm{d}(1-x)^{n-r} =$$

$$= \frac{n-r}{r}\int_0^1 x^r (1-x)^{n-r-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n-r}{r}\int_0^1 x^r (1-x)^{n-(r+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{n-r}{r} I(n,\ r).$$

Taigi gauname rekurenčiąją formulę:

$$I(n,\ r) = \frac{r}{n-r} I(n,\ r-1) \ \ (r \geq 1). \qquad (10.14)$$

Tada

$$I(n,\ 1) = \frac{1}{n-1} I(n,\ 0) = \frac{1}{n-1}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x =$$

$r = 1$

$$= -\frac{(1-x)^n}{n(n-1)}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1!(n-2)!}{n!}.$$

Toliau,

$$I(n,\ 2) = \frac{2}{n-2} I(n,\ 1) = \frac{2\cdot 1!\cdot (n-2)!}{(n-2)\cdot n!} = \frac{2!(n-3)!}{n!};$$

$$I(n,\ 3) = \frac{3}{n-3}\cdot\frac{2!(n-3)!}{n!} = \frac{3!(n-4)!}{n!};$$

....

$$I(n,\ k) = \frac{k}{n-k} I(n,\ k-1) = \frac{k}{n-k}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{k!(n-k-1)!}{n!}.$$

Taigi $\gamma_i(R) = I(n,\ r-1) = \dfrac{(r-1)!(n-r)!}{n!}$; todėl (įrašę į (10.13)) gauname galutinę Šiaplio vertės formulę:

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{R\subset N \\ i\in R}} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\Big(v(R) - v\big(R\setminus\{i\}\big)\Big),\ i\in N.$$

Formulės vienatis akivaizdi.

Belieka įsitikinti, kad gautasis vektorius

$\varphi(v) = (\varphi_1(v);\ \varphi_2(v);\ ...;\ \varphi_n(v))$

tenkina visas tris Šiaplio aksiomas S1–S3.

Pradėkime nuo pirmosios aksiomos. Tegu $T \subset N$ yra esminė lošimo koalicija. Jei $i\in N\setminus T$, tai $v(\{i\})=0$ ir $v(R) = v(R\setminus\{i\})$, $R\subset N$. Vadinasi,

$$\varphi_i(v) = 0,\ \text{kai}\ i\in N\setminus T. \tag{10.15}$$

Tada pagal 10.2 lemą

$$\sum_{i\in T}\varphi_i(v) = \sum_{i\in N}\varphi_i(v) = \sum_{i\in N}\sum_{S\subset N}\varphi_i(c_S w_S) =$$
$$= \sum_{S\subset N} c_S \sum_{i\in N}\varphi_i(w_S) = \sum_{s\subset N} c_S w_S(N) =$$
$$= v(N) = v(T).$$

Dabar tikrinkime, ar Šiaplio vertė tenkina antrąją aksiomą.

Tegu π yra aibės *N* perstata. Tada $\pi v(R) = v(\pi R)$ ir $|\pi R| = |R| = r$, kai $R\subset N$. Todėl

$$\varphi_{\pi i}(\pi v) = \sum_{\substack{\pi R \subset N \\ \pi i \in \pi R}} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\Big(v(\pi R) - v\big(\pi(R \setminus \{i\})\big)\Big) =$$

πR – perbėga visus N poaibius po r lošėjų

$$= \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in N}} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\Big(v(R) - v\big(R \setminus \{i\}\big)\Big) = \varphi_i(v)\,;\ i \in N.$$

Tikrindami, ar Šiaplio vertė tenkina S3, pasirinkime bet kuriuos du lošimus $G' = \langle N,\ v' \rangle$ ir $G'' = \langle N,\ v'' \rangle$. Tegu $G = \langle N,\ v' + v'' \rangle$ yra lošimų G' ir G'' suma. Tada

$$\varphi_i(v') + \varphi_i(v'') = \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in R}} \gamma_i(R)\Big(v'(R) - v'\big(R \setminus \{i\}\big)\Big) +$$

$$+ \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in R}} \gamma_i(R)\Big(v''(R) - v''\big(R \setminus \{i\}\big)\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in R}} \gamma_i(R)\Big(\big(v'(R) + v''(R)\big) - \big(v'(R \setminus \{i\}) + v''(R \setminus \{i\})\big)\Big) =$$

$$= \varphi_i(v' + v'').$$

Įrodėme, kad Šiaplio vertė tenkina visas tris aksiomas, S1, S2 ir S3. Lengva įsitikinti, kad visų koeficientų $\gamma_i(R)$, $i \in R$, $R \subset N$, suma yra lygi vienetui:

$$\sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}} \gamma_i(R) = \sum_{\substack{R\subset N\\ i\in R}} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} = \sum_{r=1}^{n} \binom{r-1}{n-1} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Remiantis šia koeficientų $\gamma_i(R)$, $i\in R$, $R\subset N$, savybe Šiaplio vertę $\gamma_i(v)$ galima interpretuoti kaip skirtumų $v(R)-v(R\setminus\{i\})$ vidurkį. Pastarąjį skirtumą galima suvokti kaip i-tojo lošėjo įnašą į koalicijos R išlošį (galią). Jei v yra superadityvi lošimo funkcija, tai

$$\varphi_i(v) \geq v(\{i\}), \text{ kai } i\in N.$$

Be to (pagal S1),

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

Taigi Šiaplio vektorius $\varphi(v)$ priklauso lošimo G dalybų aibei $E(v)$ (kai v yra superadityvi funkcija). ▼

■ **10.1 pavyzdys.** Raskime trijų asmenų lošimo Šiaplio vektorių, kai charakteristinės funkcijos v reikšmės yra:

$v(\{i\}) = 0$, $i = 1,\ 2,\ 3$;

$v(\{1;\ 2\}) = v(\{1;\ 3\}) = 0$, $v(\{2;\ 3\}) = 1$;

$v(\{1;\ 2;\ 3\}) = 1$.

Pagal (10.1) formulę gauname tokias Šiaplio vektoriaus $\varphi(v) = (\varphi_1(v);\ \varphi_2(v);\ \varphi_3(v))$ komponentes:

- $$\varphi_1(v)=\sum_{\substack{T\subset\{1;\ 2;\ 3\}\\ 1\in T}}\frac{(t-1)!(3-t)!}{3!}\big(v(T)-v(T\setminus\{i\})\big)=$$

$$=\frac{0!2!}{3!}\big(v(\{1\})-v(\varnothing)\big)+\frac{1!1!}{3!}\big(v(\{1;\ 2\})-v(\{2\})\big)+$$

$$+\frac{1!1!}{3!}\big(v(\{1;\ 3\})-v(\{3\})\big)+\frac{2!0!}{3!}\big(v(\{1;\ 2;\ 3\})-v(\{2;\ 3\})\big)=0;$$

- $$\varphi_2(v)=\frac{0!2!}{3!}\big(v(\{2\})-v(\varnothing)\big)+\frac{1!1!}{3!}\big(v(\{1;\ 2\})-v(1)\big)+$$

$$+\frac{1!1!}{3!}\big(v(\{2;\ 3\})-v(\{3\})\big)+$$

$$+\frac{2!0!}{3!}\big(v(\{1;\ 2;\ 3\})-v(\{1;\ 3\})\big)=\frac{1}{2};$$

- $$\varphi_3(v)=\frac{1}{2}.$$

Taigi $\varphi(v)=\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Pastaba. Šiame pavyzdyje nagrinėto lošimo šerdis yra

$$C(v)=\{(0;\ \alpha;\ 1-\alpha):\ \alpha\in[0;\ 1]\}.$$

Be to, aibė $C(v)$ yra stabilioji aibė $S(v)$.

Taigi $\varphi(v)=\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\in C(v)=S(v)$.

Panagrinėkime Šiaplio vertės skaičiavimo ypatumus kai kuriais atvejais. Tegu $G=\langle N,\ v\rangle$ yra paprastasis lošimas su superadityvia charakteristine funkcija v. Prisiminkime, kad pap-

rastojo lošimo charakteristinės funkcijos reikšmės priklauso aibei $\{0;\ 1\}$. Jei $v(K)=1$, tai koalicija $K \subset N$ yra laiminčioji, o jei $v(K)=0$, tai $K \subset N$ yra pralaiminčioji koalicija. Taigi skaičiuojant skirtumus $v(T)-v(T \setminus \{i\})$, $i \in T$, yra tik dvi galimybės – jie gali būti lygūs nuliui arba vienetui. Koaliciją T, $T \subset N$, turinčią savybę

$$v(T)=1 \text{ ir } v(T \setminus \{i\})=0,\ i \in T,$$

pavadinkime minimalia i-tojo lošėjo atžvilgiu laiminčiąja koalicija. Tokias koalicijas žymėsime W_i. Tada pagal (10.1) formulę gausime:

$$\varphi_i(v)=\sum_{W_i \subset N} \frac{(w_i-1)!(n-w_i)!}{n!},\ i \in N; \tag{10.16}$$

čia $w_i = |W_i|$.

Jei lošimas $G=\langle N,\ v\rangle$ būtų simetrinis, tai gautume

$$\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\ldots=\varphi_n(v)=\frac{v(N)}{n}.$$

■ **10.2 pavyzdys.** Tarkime, kad akcinę bendrovę sudaro keturi akcininkai, turintys atitinkamai po 10, 20, 30 ir 40 akcijų; visi sprendimai priimami pagal paprastosios daugumos (balsuojant akcijomis) taisyklę. Tada laiminčiųjų koalicijų aibę sudaro šios koalicijos: $\{2; 4\}$, $\{3; 4\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{1; 3; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$ ir $\{1; 2; 3; 4\}$. Raskime šio lošimo Šiaplio verčių vektorių $\varphi(v)=(\varphi_1(v);\ \varphi_2(v);\ \varphi_3(v);\ \varphi_4(v))$.

Skaičiuodami $\varphi_1(v)$ atkreipkime dėmesį, kad pirmojo lošėjo atžvilgiu yra tik viena minimali laiminčioji koalicija – tai koalicija $\{1; 2; 3\}$. Todėl pagal (10.16) formulę gauname:

$$\varphi_1(v) = \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Antrojo lošėjo atžvilgiu yra trys minimalios laiminčiosios koalicijos: $\{2; 4\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{2; 3; 4\}$; todėl

$$\varphi_2(v) = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Analogiškai skaičiuojame ir likusių dviejų lošėjų Šiaplio vertes. Gausime $\varphi_3(v) = \frac{1}{4}$ ir $\varphi_4(v) = \frac{5}{12}$. Taigi

$$\varphi(v) = \left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{12}\right).$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad $\varphi_2(v) = \varphi_3(v)$, nors trečiasis lošėjas turi gerokai daugiau akcijų už antrąjį. Vis dėlto nesunku suprasti, kad trečiasis lošėjas turi tiek pat galimybių sudaryti minimalią laiminčiąją koaliciją kiek ir antrasis. Ketvirtojo lošėjo Šiaplio vertė yra didesnė, o pirmojo – mažesnė už turimų akcijų dalį.

■ **10.3 pavyzdys.** Nagrinėkime 10.2 pavyzdžio lošimą, pakeitę jame lošėjų akcijų skaičius tokiais: 10, 30, 30, 40. Pasikeitė tik antrojo lošėjo akcijų skaičius, tačiau rezultatas skaičiuojant

Šiaplio verčių vektorių keičiasi iš esmės – gaunTame $\varphi(v)=\left(0;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. Pirmojo lošėjo akcijos pasidaro bevertės, o didesnis ketvirtojo lošėjo akcijų skaičius nesuteikia jam jokio pranašumo.

11. Koalicinio lošimo nukleolas

Tegu $G = \langle N,\ v \rangle$ yra koalicinis lošimas su charakteristine funkcija v ir baigtine lošėjų aibe $N = \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n\}$; $E(v)$ – lošimo dalybų aibė.

11.1 APIBRĖŽIMAS. Dalybų $x \in E(v)$ *ekscesu* koalicijos $K \subset N$ atžvilgiu yra vadinamas dydis $e(x,\ K)$, apibrėžiamas formule

$$e(x,\ K) = v(K) - x(K). \tag{11.1}$$

Šis dydis yra koalicijos $K \subset N$ požiūrio į dalybas $x \in E(v)$ charakteristika.

Vartojant eksceso sąvoką, lošimo šerdį $C(v)$ galima apibūdinti taip:

$$C(v) = \{x \in E(v):\ e(x,\ K) \le 0,\ K \subset N,\ e(x,\ N) = 0\}.$$

Apibrėžkime leksikografinį preferencijos sąryšį $\underset{L}{\succsim}$ dalybų aibėje $E(v)$.

Tegu $x \in E(v)$, $K_i \subset N$, $\theta_i(x) = e(x,\ K_i) = v(K_i) - x(K_i)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ 2^n - 1$. Tada $\theta(x) = (\theta_1(x);\ \theta_2(x);\ ...;\ \theta_{2^n - 1}(x))$; čia $i < j \Rightarrow \theta_i(x) \ge \theta_j(x)$.

Vektorius $\theta(x)$ ir $\theta(y)$, $x,\ y \in E(v)$, lyginkime leksikografiškai:

1) $\theta(x) \underset{L}{\succ} \theta(y) \Leftrightarrow$ yra toks $i \in \{1;\ 2;\ \dots;\ 2^n - 1\}$, kad

$$\theta_1(x) = \theta_1(y),\ \theta_2(x) = \theta_2(y),\ \dots,$$
$$\theta_{i-1}(x) = \theta_{i-1}(y),\ \theta_i(x) > \theta_i(y); \qquad (11.2)$$

2) $\theta(x) \underset{L}{\sim} \theta(y) \Leftrightarrow \theta(x) \not\succ_L \theta(y)$ ir $\theta(y) \not\succ_L \theta(x)$. (11.3)

11.2 APIBRĖŽIMAS. Preferencijos sąryšis $\succsim_L$, apibrėžtas lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ dalybų aibėje $E(v)$, yra vadinamas leksikografiniu preferencijos sąryšiu, jeigu

$$x \succsim_L y \Leftrightarrow \theta(y) \succsim_L \theta(x);\ x, y \in E(v).$$

11.3 APIBRĖŽIMAS. (D. Schmeidler, 1966). Lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ *nukleolu* (žym. $\upsilon(v)$) yra vadinama aibė

$$\upsilon(v) = \{\, x \in E(v):\ x \succsim_L y,\ y \in E(v) \,\}.$$

11.1 TEOREMA. Jeigu lošimo $G = \langle N,\ v \rangle$ charakteristinė funkcija v superadityvi, tai nukleolas $\upsilon(v)$ yra netuščioji aibė.

▲ ***Įrodymas.*** Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad funkcija $\theta_i(x)$, $x \in E(v)$, yra tolydi, nes

$$\theta_i(x) = \max\{v(K) - x(K):\ K \in \mathcal{A}_i\},\ \mathcal{A}_i \subset 2^N,$$

o $v(K) - x(K)$ yra tolydi kintamojo (vektoriaus) x funkcija.

Apibrėžkime aibes:

$$E_1(v) = \{x \in E(v):\ \theta_1(x) \le \theta_1(y),\ y \in E(v)\},$$

$$E_i(v)=\{x\in E_{i-1}(v):\ \theta_i(x)\le\theta_i(y),\ y\in E_{i-1}(v)\},$$

$i=2,\ ...,\ 2^n-1.$

Aibės $E_1(v)$, $E_2(v)$, ..., $E_{2^n-1}(v)$ yra netuščios ir kompaktinės, nes $E(v)$ yra kompaktinė aibė, o $\theta_i(x)$, $i=1,2,\ ...,\ 2^n-1$, yra tolydžios funkcijos aibėje $E(v)$.

Aišku, kad $\upsilon(v)=E_{2^n-1}(v)$. Taigi $\upsilon(v)\ne\varnothing$. ▼

11.2 TEOREMA. Jeigu lošimo $G=\langle N,\ v\rangle$ charakteristinė funkcija v yra superadityvi, tai šio lošimo nukleolą $\upsilon(v)$ sudaro vienintelis elementas – kuris nors dalybų vektorius $x\in E(v)$.

▲ ***Įrodymas.*** Matyti, kad lošimo $G=\langle N,\ v\rangle$ dalybų aibė $E(v)$ (kai v yra superadityvi funkcija) yra iškiloji aibė. Todėl teoremos teiginiui pagrįsti pakanka įrodyti, kad bet kuriai dalybų $x,\ y\in E(v)$ porai, tenkinančiai sąlygą $x\ne y$, galioja implikacija:

$$\theta(x)=\theta(y)\Rightarrow\theta(x)\underset{L}{\succ}\theta\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{11.4}$$

Iš pradžių apibrėžkime bet kurios m-matės erdvės $\mathbb{R}_m$ atvaizdį η pačia erdve $\mathbb{R}_m$:

$$\eta:\ \mathbb{R}_m\to\mathbb{R}_m.$$

Vektoriaus $\eta(x)=(\eta_1(x);\ \eta_2(x);\ ...;\ \eta_m(x))$, $x\in\mathbb{R}_m$, komponentės randamos taip:

$$\eta_1(x)=\max\{x_i:\ i\in\{1;\ 2;\ ...;\ m\}\},$$

$$\eta_k(x) = \max\left(x_i : i \in \{1;\ 2;\ ...;\ m\} \setminus \{\eta_1(x);\ ...;\ \eta_{k-1}(x)\}\right),$$
$$k = 2,\ 3,\ ...,\ m.$$

Vektorių $\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}_m$, aibėje įveskime leksikografinę tvarką ir įrodykime, kad bet kuriai porai $x, y \in \mathbb{R}_m$ galioja tokia sąsaja:

$$\eta(x) + \eta(y) \succsim_L \eta(x+y). \qquad (11.5)$$

Tegu

- $\eta_k(x) = x_{i_k}$, $i_k \in \{1;\ 2;\ ...;\ m\}$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ m$;
- $\eta_k(y) = y_{j_k}$, $j_k \in \{1;\ 2;\ ...;\ m\}$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ m$;
- $\eta_k(x+y) = x_{l_k} + y_{l_k}$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ m$.

Aišku, kad (pagal η apibrėžimą)

$$x_{i_1} \geq x_{l_1} \text{ ir } y_{j_1} \geq y_{l_1};$$

todėl

$$x_{i_1} + y_{j_1} \geq x_{l_1} + y_{l_1}, \text{ arba } \eta_1(x) + \eta_1(y) \geq \eta_1(x+y).$$

Jei nelygybė griežta, tai

$$\eta_1(x) + \eta_1(y) \underset{L}{\succ} \eta_1(x+y).$$

Kai galioja lygybė $x_{i_1} + y_{j_1} = x_{l_1} + y_{l_1}$, tai galioja lygybės $x_{i_1} = x_{l_1}$ ir $y_{j_1} = y_{l_1}$. Šiuo atveju gretiname vektorių $\eta(x) + \eta(y)$ ir $\eta(x+y)$ antrąsias komponentes.

Aišku, kad

$$x_{i_2} \geq x_{l_2} \text{ ir } y_{j_2} \geq y_{l_2};$$

todėl $\eta_2(x) + \eta_2(y) \geq \eta_2(x+y)$. Vėl turime dvi galimybes:

- $\eta(x)+\eta(y)\underset{L}{\succ}\eta(x+y)$ (kai $\eta_2(x)+\eta_2(y)>\eta_2(x+y)$),

arba

- $x_{i_2}=x_{l_2}$ ir $y_{j_2}=y_{l_2}$.

Galutinė išvada tokia: arba $\eta(x)+\eta(y)\underset{L}{\succ}\eta(x+y)$, arba $\eta(x)+\eta(y)=\eta(x+y)$; taigi $\eta(x)+\eta(y)\ \succsim_L\ \eta(x+y)$.

Dabar nagrinėkime dalybų $x\in E(v)$ ekscesų vektorių $\theta(x)$, $\theta(x)\in\mathbb{R}_{2^n-1}$, aibę. Nesunku suprasti, kad

$$\theta(x)=\eta\left(\left\{e(x,\,K):\ K\subset N\right\}\right),$$

$$\theta(y)=\eta\left(\left\{e(y,\,K):\ K\subset N\right\}\right),$$

$$\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\theta(x+y)=\eta\left(\left\{e(x,\,K)+e(y,\,K):\ K\subset N\right\}\right)=$$
$$=\eta\left(\left\{2v(K)-x(K)-y(K):\ K\subset N\right\}\right).$$

Pagal (11.5) gauname, kad kiekvienai dalybų porai $x,\ y\in E(v)$ galioja sąryšis

$$\theta(x)+\theta(y)\ \succsim_L\ \theta(x+y)=2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Jei $\theta(x)=\theta(y)$, $x\neq y$, tai gauname $2\theta(x)\ \succsim_L\ 2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$, t. y. $\theta(x)\ \succsim_L\ \theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Belieka įrodyti, kad negali būti $\theta(x)\underset{L}{\sim}\theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$, kai $x\neq y$.

Jei būtų $\theta(x) \underset{L}{\sim} \theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$, tai turėtų galioti lygybė $\theta(x) = \theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Pagal atvaizdžio θ apibrėžimą tada gautume

$$e(x,\ K) = e\left(\frac{x+y}{2},\ K\right),\ K \subset N,$$

arba

$$v(K) - x(K) = v(K) - \frac{x(K) + y(K)}{2},\ K \subset N.$$

Iš čia gautume $x(K) = y(K)$, kai $K \subset N$; taigi $x = y$.

Įrodėme, kad implikacija (11.4) galioja, kai $x \neq y$. ▼

Literatūra

Parthasarathy T., Raghavan T. Some topics in two-person games. New York: American Elsevier Publishing Company, 1971 (vertimas į rusų k.: Maskva, 1974).

Owen G. Game theory. Philadelphia, London, Toronto: W. B. Saunders Company, 1968 (vertimas į rusų k.: Maskva, 1971).

Vilkas E. Optimalumas lošimuose ir sprendimuose (rusų k.). Maskva: Nauka, 1990.

Vilkas E. Sprendimų priėmimo teorija. Kaunas: VDU, 2003.

Dalykinė rodyklė

Antanas Apynis
LOŠIMŲ TEORIJA

Kalbos redaktorė
Gražina Indrišiūnienė
Viršelio dailininkas
Gediminas Markauskas

Išleido Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01122 Vilnius
El. paštas: *info@leidykla.vu.lt*

Spausdino UAB „Pozicija“
S. Žukausko g. 49, LT-09131 Vilnius